

Introducción a la  
**TEORÍA DEL RIESGO**  
en seguros  
[ Notas preliminares ]

Luis Rincón  
Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias UNAM  
Circuito Exterior de CU  
04510 México DF  
`lars@ciencias.unam.mx`

Junio 2006

El presente texto corresponde a la versión de junio de 2006.  
Este material se encuentra en permanente actualización y corrección.  
La última versión disponible puede obtenerse en  
<http://www.matematicas.unam.mx/lars>

# Prefacio

Este texto contiene los notas de clase del curso semestral de *Teoría del Riesgo* impartido por el autor a estudiantes de último semestre de la carrera de actuaría en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Contiene el material básico para un curso introductorio de ciertos temas de la teoría matemática del riesgo en seguros, así como una colección de ejercicios.

Considero necesario hacer énfasis en que este trabajo tiene el caracter de preliminar y que el material completo fue compilado de las fuentes que aparecen al final del texto. Debido a la falta de bibliografía en el tema en idioma español y a la urgencia de contar con este material de apoyo, me atrevo a presentar estas notas preliminares con la esperanza de mejorarlas paulatinamente a lo largo de los próximos meses. Cualquier comentario, corrección o sugerencia es ampliamente agradecida.

El Autor  
Ciudad Universitaria UNAM

# Contenido

<b>1. Modelo individual vs modelo colectivo</b>	<b>4</b>
1.1. Modelo individual . . . . .	4
1.2. Modelo colectivo . . . . .	8
1.3. Ejercicios . . . . .	21
<b>2. Fórmula de Panjer y algunos métodos de aproximación</b>	<b>25</b>
2.1. Fórmula de recursión de Panjer . . . . .	25
2.2. Aproximación normal . . . . .	30
2.3. Aproximación gama trasladada . . . . .	31
2.4. Aproximación de Edgeworth . . . . .	32
2.5. Ejercicios . . . . .	34
<b>3. Principios para el cálculo de primas</b>	<b>37</b>
3.1. Principios generales . . . . .	37
3.2. Propiedades . . . . .	40
3.3. Ejercicios . . . . .	41
<b>4. Reaseguro</b>	<b>42</b>
4.1. Reaseguro aplicado a cada reclamación . . . . .	43
4.2. Reaseguro aplicado al total del riesgo . . . . .	44
4.3. Ejercicios . . . . .	47
<b>5. Teoría de la credibilidad</b>	<b>48</b>
5.1. Credibilidad completa . . . . .	48
5.2. Credibilidad parcial . . . . .	50
5.3. Credibilidad Bayesiana . . . . .	51
<b>6. Procesos estocásticos</b>	<b>54</b>
6.1. Filtraciones y tiempos de paro . . . . .	55
6.2. Proceso de Poisson . . . . .	56

6.3. Martingalas . . . . .	57
6.4. Ejercicios . . . . .	59
<b>7. Teoría de la ruina</b>	<b>60</b>
7.1. Modelo clásico de Cramér-Lundberg . . . . .	60
7.2. Probabilidad de ruina . . . . .	62
7.3. El coeficiente de ajuste . . . . .	65
7.4. Ejercicios . . . . .	71
<b>A. Distribuciones de probabilidad</b>	<b>73</b>
<b>B. El alfabeto griego</b>	<b>79</b>
<b>C. Función indicadora</b>	<b>80</b>
<b>D. Esperanza condicional</b>	<b>81</b>

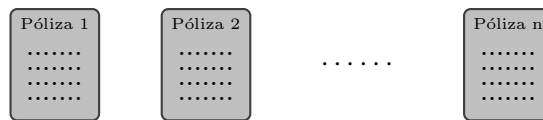
# Capítulo 1

## Modelo individual vs modelo colectivo

En este capítulo se presenta la perspectiva individual y la colectiva para modelar el riesgo correspondiente al agregado de reclamaciones que afronta una compañía aseguradora. Se estudian algunas propiedades y relaciones entre estas dos perspectivas. En el resto del curso se adopta el modelo colectivo como modelo fundamental.

### 1.1. Modelo individual

Suponga que se tiene un portafolio de  $n$  pólizas individuales de seguros válidas por un año:



Sea  $p_j$  la probabilidad de que el  $j$ -ésimo asegurado no efectúe ninguna reclamación durante el tiempo de vigencia del seguro y sea  $q_j$  la probabilidad de que se observe exactamente una reclamación. Suponga la igualdad  $p_j + q_j = 1$ , ello inhibe el hecho de que haya más de una reclamación por cada asegurado.

Defina la variable aleatoria

$$D_j = \begin{cases} 1 & \text{si hay reclamación en la póliza } j, \\ 0 & \text{si no hay reclamación en la póliza } j. \end{cases}$$

Claramente  $D_j$  tiene distribución Bernoulli con parámetro  $q_j$ . Suponga ahora artificialmente que cada póliza efectúa una reclamación y sea la variable aleatoria  $C_j > 0$  el monto de la reclamación efectuada por la póliza  $j$ . La verdadera reclamación de la póliza  $j$  está dada por el producto:

$$D_j C_j = \begin{cases} C_j & \text{si } D_j = 1, \\ 0 & \text{si } D_j = 0. \end{cases}$$

De esta forma se considera como datos en este modelo los vectores aleatorios

$$(D_1, C_1), (D_2, C_2), \dots, (D_n, C_n),$$

que se asumen independientes entre sí, y consideraremos también que las variables  $D_j$  y  $C_j$  son independientes. El monto de *reclamaciones agregadas* o *agregado de reclamaciones* es la variable

$$S = \sum_{j=1}^n D_j C_j. \quad (1.1)$$

Esta variable es entonces el monto que afronta una compañía aseguradora por concepto de reclamaciones durante el periodo completo del seguro. La ecuación (1.1) representa el *modelo individual* para un seguro de las características señaladas pues éste lleva registro de las probabilidades de reclamación y posible monto de reclamación de cada póliza de manera individual. Desde el punto de vista matemático, nuestro objetivo es conocer las características probabilísticas de  $S$ , a quien llamaremos *riesgo*.

Si  $F_j(x)$  denota la función de distribución de  $D_j C_j$  entonces la función de distribución  $F(x)$  del riesgo  $S$  adquiere la siguiente expresión en términos de convoluciones:

$$F(x) = (F_1 * \dots * F_n)(x).$$

Esta expresión general y compacta es, sin embargo, un tanto difícil de calcular. Como primeros resultados generales se presentan a continuación algunas características numéricas de  $S$ . Denotaremos por  $G_j(x)$  la función de distribución de  $C_j$ , y como es costumbre, cuando exista,  $M_X(t)$  denota la función generadora de momentos de una variable  $X$ .

**Proposición 1** *Bajo la notación e hipótesis del modelo individual se tienen los siguientes resultados.*

1.  $F_j(x) = p_j 1_{[0, \infty)}(x) + q_j G_j(x)$ .
2.  $M_{D_j C_j}(t) = 1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1)$ .
3.  $M_S(t) = \prod_{j=1}^n [1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1)]$ .
4.  $E(S) = \sum_{j=1}^n q_j E(C_j)$ .
5.  $Var(S) = \sum_{j=1}^n [q_j Var(C_j) + q_j p_j E^2(C_j)]$ .

*Demostración.*

1. Para cualquier número real  $x$ ,

$$\begin{aligned}
 F_j(x) &= P(D_j C_j \leq x) \\
 &= P(D_j C_j \leq x \mid D_j = 0)P(D_j = 0) \\
 &\quad + P(D_j C_j \leq x \mid D_j = 1)P(D_j = 1) \\
 &= P(0 \leq x \mid D_j = 0)p_j + P(C_j \leq x \mid D_j = 1)q_j \\
 &= p_j 1_{[0, \infty)}(x) + q_j G_j(x).
 \end{aligned}$$

2. Tenemos que

$$\begin{aligned}
 M_{D_j C_j}(t) &= E(e^{t D_j C_j}) \\
 &= E(e^{t D_j C_j} \mid D_j = 0)P(D_j = 0) \\
 &\quad + E(e^{t D_j C_j} \mid D_j = 1)P(D_j = 1) \\
 &= p_j + q_j M_{C_j}(t) \\
 &= 1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1).
 \end{aligned}$$

3. Esta igualdad se sigue directamente de la anterior usando la hipótesis de independencia.

4. Nuevamente por independencia,

$$\begin{aligned} E(S) &= \sum_{j=1}^n E(D_j C_j) \\ &= \sum_{j=1}^n E(D_j) E(C_j) \\ &= \sum_{j=1}^n q_j E(C_j). \end{aligned}$$

5. Primeramente se tiene que

$$\begin{aligned} E(D_j C_j) &= q_j E(C_j), \\ \text{y } E(D_j^2 C_j^2) &= q_j E(C_j^2). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{Var}(D_j C_j) &= q_j E(C_j^2) - q_j^2 E^2(C_j) \\ &= q_j [\text{Var}(C_j) + E^2(C_j)] - q_j^2 E^2(C_j) \\ &= q_j \text{Var}(C_j) + q_j p_j E^2(C_j). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{Var}(S) &= \sum_{j=1}^n \text{Var}(D_j C_j) \\ &= \sum_{j=1}^n [q_j \text{Var}(C_j) + q_j p_j E^2(C_j)]. \end{aligned}$$

□

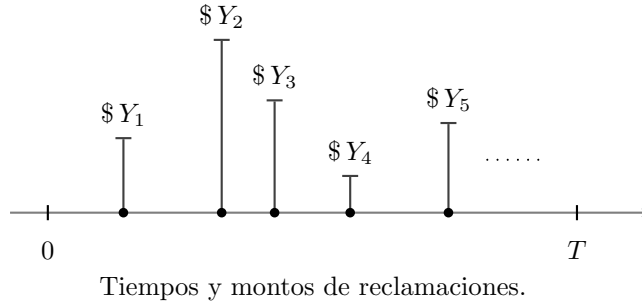
Cuando  $n$  es grande, el teorema del límite central establece que la distribución de  $S$  puede aproximarse mediante la distribución normal, es decir,

$$\begin{aligned} P(S \leq x) &= P\left(\frac{S - E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}} \leq \frac{x - E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{x - E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right). \end{aligned}$$

Esta aproximación puede ser adecuada para ciertos riesgos pero tiene la desventaja de que asigna una probabilidad positiva al intervalo  $(-\infty, 0)$ , lo cual no es consistente con el hecho de que  $S \geq 0$ . Adicionalmente la función de densidad normal decae muy rápidamente, y existen riesgos que no cumplen con tal característica.

## 1.2. Modelo colectivo

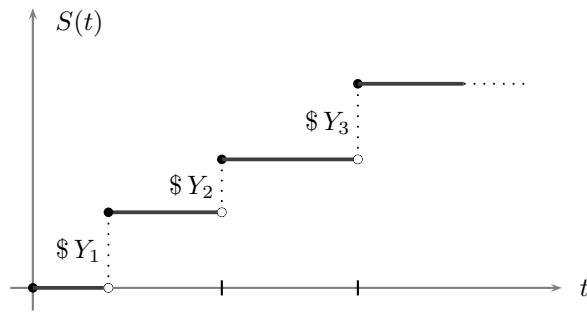
Considere un conjunto de un número no determinado de contratos de seguros sobre un periodo de tiempo  $[0, T]$ , el cual puede corresponder a un año por ejemplo. Sea  $N$  la variable aleatoria que denota el número de reclamaciones ocurridas en este intervalo, y sean las variables  $Y_1, \dots, Y_N$  los montos de estas reclamaciones. Gráficamente una posible realización de tal esquema se muestra en la siguiente figura:



Consideraremos que el número de reclamaciones  $N$  y los montos de éstas,  $Y_1, \dots, Y_N$ , son variables aleatorias independientes. Más aún supondremos que las reclamaciones mismas son independientes entre sí y comparten la misma distribución de probabilidad. El *monto agregado* o *acumulado* de todas las reclamaciones efectuadas es la variable aleatoria  $S$ , llamada *riesgo*, y definida como sigue

$$S = \sum_{j=1}^N Y_j. \quad (1.2)$$

Observe que cada sumando es una variable aleatoria y que el número de sumandos es también aleatorio. La ecuación (1.2) representa el *modelo colectivo* para un contrato de seguros. Nuevamente nuestro objetivo es estudiar las características de la variable  $S$ , cuyas posibles realizaciones como función del tiempo tienen la siguiente forma:



El agregado de reclamaciones como función del tiempo.

A la función de distribución de cada reclamación  $Y$  la denotaremos por la letra  $G$ . Se asume naturalmente que  $G(0) = 0$ , ello equivale a decir que la variable  $Y$  es no negativa. Adicionalmente usaremos la notación  $\mu_n = E(Y^n)$ , en particular se escribe  $\mu$  en lugar de  $\mu_1 = E(Y)$ .

Nuevamente el problema central es encontrar la distribución de probabilidad de  $S$ , la cual naturalmente depende de la distribución de  $Y$  y de  $N$ . Un primer resultado general al respecto es el siguiente.

**Proposición 2** *La función de distribución del riesgo  $S$  en el modelo colectivo es*

$$F_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n}(x)P(N = n).$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S \leq x \mid N = n)P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(Y_1 + \cdots + Y_n \leq x)P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n}(x)P(N = n). \end{aligned}$$

□

Algunas características numéricas de la variable  $S$  se muestran a continuación.

**Proposición 3** *El riesgo  $S$  en el modelo colectivo cumple las siguientes propiedades.*

1.  $E(S) = E(N)E(Y)$ .
2.  $E(S^2) = E(N)E(Y^2) + E(N(N - 1))E^2(Y)$ .
3.  $Var(S) = Var(N)E^2(Y) + Var(Y)E(N)$ .
4.  $M_S(r) = M_N(\ln(M_Y(r)))$ .

*Demostración.*

1. Condicionando sobre el valor de  $N$ , y después usando la hipótesis de independencia,

$$\begin{aligned}
 E(S) &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{j=1}^N Y_j \mid N = n\right)P(N = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{j=1}^n Y_j \mid N = n\right)P(N = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} nE(Y)P(N = n) \\
 &= E(N)E(Y).
 \end{aligned}$$

2. Nuvamente condicionando sobre el valor de  $N$ ,

$$\begin{aligned}
 E(S^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\left(\sum_{j=1}^N Y_j\right)^2 \mid N = n\right)P(N = n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\left(\sum_{j=1}^n Y_j\right)^2 \mid N = n\right)P(N = n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\left(\sum_{j=1}^n Y_j\right)^2\right)P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^n E(Y_j^2) + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^n E(Y_j Y_k)\right]P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [nE(Y^2) + (n(n-1))E^2(Y)]P(N = n) \\
&= E(N)E(Y^2) + E(N(N-1))E^2(Y).
\end{aligned}$$

3. Por las fórmulas anteriores,

$$\begin{aligned}
\text{Var}(S) &= E(S^2) - E^2(S) \\
&= E(N)E(Y^2) + E(N(N-1))E^2(Y) - E^2(N)E^2(Y) \\
&= E(N)[E(Y^2) - E^2(Y)] + [E(N^2) - E^2(N)]E^2(Y) \\
&= E(N)\text{Var}(Y) + \text{Var}(N)E^2(Y).
\end{aligned}$$

4. De manera análoga a los dos primeros incisos,

$$\begin{aligned}
M_S(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{r(Y_1+\dots+Y_n)} | N = n)P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{r(Y_1+\dots+Y_n)})P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (M_Y(r))^n P(N = n) \\
&= E((M_Y(r))^N) \\
&= E(e^{N \ln(M_Y(r))}) \\
&= M_N(\ln(M_Y(r))).
\end{aligned}$$

□

Consideraremos a continuación algunos casos particulares del modelo colectivo.

## Modelo binomial compuesto

Cuando el número de reclamaciones  $N$  tiene una distribución binomial se dice que el riesgo  $S$  tiene una distribución *binomial compuesta*. Bajo esta hipótesis se tienen los siguientes resultados.

**Proposición 4 (Modelo binomial compuesto)** *Si  $N$  tiene una distribución  $\text{bin}(n, p)$  entonces*

a)  $E(S) = np\mu$ .

b)  $\text{Var}(S) = np(\mu_2 - p\mu^2)$ .

c)  $M_S(r) = (1 - p + pM_Y(r))^n$ .

d)  $E[(S - E(S))^3] = n(p\mu_3 - 3p^2\mu_2\mu + 2p^3\mu^3)$ .

Estas expresiones se siguen fácilmente de las fórmulas generales demostradas antes, basta recordar que si  $N$  tiene distribución  $\text{bin}(n, p)$ , entonces  $E(N) = np$ ,  $\text{Var}(N) = np(1 - p)$  y  $M_N(r) = (1 - p + pe^r)^n$ .

## Modelo binomial negativo compuesto

Cuando el número de reclamaciones  $N$  tiene una distribución binomial negativa se dice que el riesgo  $S$  tiene una distribución *binomial negativa compuesta*. En este caso se tiene lo siguiente.

**Proposición 5 (Modelo binomial negativo compuesto)** Si  $N$  tiene una distribución bin neg( $\alpha, p$ ) entonces

a)  $E(S) = \alpha(1/p - 1)\mu.$

b)  $Var(S) = \alpha(1/p - 1)(1/p)\mu^2 + \alpha(1/p - 1)(\mu_2 - \mu^2).$

c)  $M_S(r) = \left( \frac{p}{1 - (1-p)M_Y(r)} \right)^\alpha.$

d)  $E[(S - E(S))^3] = \alpha(1/p - 1)\mu_3 + 3\alpha(1/p - 1)^2\mu_2\mu + 2\alpha(1/p - 1)^3\mu^3.$

Para encontrar estas fórmulas es suficiente recordar que si  $N$  tiene distribución bin neg( $\alpha, p$ ) entonces  $E(N) = \alpha(1-p)/p$ ,  $Var(N) = \alpha(1-p)/p^2$  y  $M_N(r) = [p/(1 - (1-p)e^r)]^\alpha$ .

## Modelo Poisson compuesto

Cuando el número de reclamaciones  $N$  tiene una distribución Poisson se dice que el riesgo  $S$  tiene una distribución *Poisson compuesta*, y se tienen los siguientes resultados.

**Proposición 6 (Modelo Poisson compuesto)** Si  $N$  tiene una distribución Poisson( $\lambda$ ) entonces

a)  $E(S) = \lambda\mu.$

b)  $Var(S) = \lambda\mu_2.$

c)  $M_S(r) = \exp[\lambda(M_Y(r) - 1)].$

d)  $E[(S - E(S))^3] = \lambda\mu_3.$

e)  $\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sqrt{\lambda\mu_2^3}} > 0.$

Nuevamente estas expresiones son consecuencia de las fórmulas generales demostradas antes, y del hecho de que si  $N$  tiene distribución Poisson( $\lambda$ ) entonces  $E(N) = \lambda$ ,  $\text{Var}(N) = \lambda$  y  $M_N(r) = \exp[\lambda(e^r - 1)]$ . Observe que el parámetro  $\lambda$  y la distribución de la variable  $Y$  determinan por completo al modelo Poisson compuesto.

## Modelo Poisson compuesto asociado al modelo individual

Considere el modelo individual de riesgo

$$S^i = \sum_{j=1}^n D_j C_j,$$

junto con la notación e hipótesis correspondientes. A partir de este modelo se construye a continuación un modelo colectivo con distribución Poisson compuesta. Para ello recuerde que únicamente se necesita establecer el valor del parámetro  $\lambda$  de la distribución Poisson y la función de distribución  $G(x)$  del monto de las reclamaciones. Sean entonces

$$\lambda = \sum_{j=1}^n q_j, \tag{1.3}$$

$$\text{y } G(x) = \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{\lambda} G_j(x). \tag{1.4}$$

Con la primera igualdad se establece que el número esperado de reclamaciones en ambos modelos sea el mismo. La segunda ecuación define a la función de distribución de una reclamación en el modelo colectivo como la suma ponderada de las funciones de distribución del monto de las reclamaciones en el modelo individual. De esta forma se construye entonces un modelo colectivo

$$S^c = \sum_{j=1}^N Y_j.$$

a quien llamaremos *modelo colectivo Poisson compuesto asociado al modelo individual*. Este modelo tiene las siguientes propiedades.

**Proposición 7 (Características del modelo Poisson asociado)** Sea  $S^c$  el modelo colectivo Poisson compuesto asociado al modelo individual  $S^i$  con reclamaciones  $Y$ . Entonces

$$1. E(S^c) = \sum_{j=1}^n q_j E(C_j).$$

$$2. \text{Var}(S^c) = \sum_{j=1}^n q_j [\text{Var}(C_j) + E^2(C_j)].$$

$$3. E(Y^k) = \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{\lambda} E(C_j^k).$$

$$4. M_Y(t) = \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{\lambda} M_{C_j}(t).$$

*Demostración.* Estas expresiones se siguen directamente de resultados previos acerca del modelo Poisson compuesto y de las igualdades (1.3) y (1.4). Por ejemplo, el  $k$ -ésimo momento de una reclamación del modelo  $S^c$  es

$$\begin{aligned} E(Y^k) &= \int_0^{\infty} y^k dG(y) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{\lambda} \int_0^{\infty} y^k dG_j(y) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{\lambda} E(C_j^k). \end{aligned}$$

□

A modo de comparación se tiene entonces que  $E(S^i) = E(S^c)$ , mientras que  $\text{Var}(S^i) \leq \text{Var}(S^c)$ .

## El modelo Poisson compuesto asociado como límite del modelo individual

Sea  $S^i$  el riesgo en un modelo individual y sea  $S^c$  el riesgo del modelo colectivo Poisson compuesto asociado. En esta sección se demuestra que este modelo colectivo puede ser obtenido como un proceso límite en el modelo individual. Consideremos entonces el modelo individual junto con la notación e hipótesis usuales. Por resultados previos sabemos que

$$M_{S^i}(t) = \prod_{j=1}^n [1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1)].$$

Se construye un modelo individual adicional  $S_k^i$  de la siguiente forma: Cada póliza  $j$  se reemplaza por  $k$  pólizas idénticas en cada una de ellas la probabilidad de reclamación se define como  $q_j/k$ , y la función de distribución del monto de una reclamación es la misma  $G_j$ . Entonces el portafolio consiste ahora de  $kn$  pólizas. Por lo tanto si  $S_k^i$  denota el riesgo asociado a tal portafolio entonces se tiene que

$$M_{S_k^i}(t) = \prod_{j=1}^n [1 + \frac{q_j}{k}(M_{C_j}(t) - 1)]^k.$$

Se hace ahora tender  $k$  a infinito y usando el resultado  $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + x/k)^k = e^x$  se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} M_{S_k^i}(t) &= \prod_{j=1}^n \exp[q_j(M_{C_j}(t) - 1)] \\ &= \exp\left[\sum_{j=1}^n q_j M_{C_j}(t) - \lambda\right] \\ &= \exp[\lambda(M_Y(t) - 1)] \\ &= M_{S^c}(t). \end{aligned}$$

Puesto que la convergencia de funciones generadoras de momentos es equivalente a la convergencia en distribución de las correspondientes variables aleatorias, se obtiene entonces que el modelo colectivo Poisson compuesto asociado es el límite en distribución del modelo individual cuando el número de polizas crece y las probabilidades de reclamación se hacen cada vez

más pequeñas. El argumento presentado en esta sección justifica el uso del modelo Poisson compuesto bajo las condiciones mencionadas.

En este sentido, el siguiente argumento intuitivo también favorece al modelo Poisson compuesto como una generalización del modelo individual. Recordemos nuevamente que la función generadora de momentos del riesgo  $S^i$  en el modelo individual es

$$M_{S^i}(t) = \prod_{j=1}^n [1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1)].$$

El término  $q_j(M_{C_j}(t) - 1)$  es pequeño para valores pequeños de  $t$ . Usando la fórmula  $\ln(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 + \dots$ , se puede escribir la aproximación  $\ln(1 + x) \approx x$ . De modo que

$$\begin{aligned} \ln(M_{S^i}(t)) &= \sum_{j=1}^n \ln[1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1)] \\ &\approx \sum_{j=1}^n q_j(M_{C_j}(t) - 1) \\ &= \lambda \left[ \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{\lambda} (M_{C_j}(t) - 1) \right] \\ &= \lambda \left[ \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{\lambda} M_{C_j}(t) - 1 \right], \end{aligned}$$

en donde  $\lambda = q_1 + \dots + q_n$ . Por lo tanto

$$M_{S^i}(t) \approx \exp(\lambda \left[ \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{\lambda} M_{C_j}(t) - 1 \right]).$$

Esta es nuevamente la función generadora de momentos del riesgo con distribución Poisson compuesta en donde los montos de las reclamaciones tienen función generadora de momentos

$$\sum_{j=1}^n \frac{q_j}{\lambda} M_{C_j}(t).$$

## Modelo Poisson compuesto con varios tipos de riesgos

En esta sección se demuestra que la suma de riesgos independientes que siguen el modelo Poisson compuesto también es Poisson compuesto.

**Proposición 8** Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos riesgos independientes con distribución Poisson compuesta con parámetros  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , y reclamaciones  $Y^{(1)}$  y  $Y^{(2)}$  con función de distribución  $G_1(x)$  y  $G_2(x)$  respectivamente. Entonces el riesgo  $S = S_1 + S_2$  también sigue una distribución Poisson compuesta con parámetro  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ , y las reclamaciones tienen función de distribución

$$G(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda}G_1(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda}G_2(x).$$

*Demostración.* Por independencia tenemos que

$$\begin{aligned} M_{S_1+S_2}(r) &= M_{S_1}(r)M_{S_2}(r) \\ &= \exp[\lambda_1(M_{Y^{(1)}}(r) - 1)] \exp[\lambda_2(M_{Y^{(2)}}(r) - 1)] \\ &= \exp\left[\lambda\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}M_{Y^{(1)}}(r) + \frac{\lambda_2}{\lambda}M_{Y^{(2)}}(r) - 1\right)\right], \end{aligned}$$

en donde  $\frac{\lambda_1}{\lambda}M_{Y^{(1)}}(r) + \frac{\lambda_2}{\lambda}M_{Y^{(2)}}(r)$  es la función generadora de momentos de la función de distribución  $G(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda}G_1(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda}G_2(x)$ .  $\square$

El resultado anterior puede extenderse al caso  $S = S_1 + \dots + S_n$ .

## Modelo Poisson compuesto con reclamaciones clasificadas

Sea  $S$  un riesgo con distribución Poisson compuesta de parámetro  $\lambda$ . Suponga que los montos de las reclamaciones pueden ser clasificadas en  $m$  categorías excluyentes y exhaustivas denotadas por  $A_1, \dots, A_m$ . Sea  $p_k = P(Y \in A_k) > 0$  tal que  $p_1 + \dots + p_m = 1$ . Sea  $N_k$  el número de reclamaciones del tipo  $k$ . Entonces  $N = N_1 + \dots + N_m$  y debido a la independencia de los montos en

las reclamaciones, el vector  $(N_1, \dots, N_m)$  tiene una distribución condicional multinomial  $(p_1, \dots, p_m; n)$  cuando  $N = n$ , es decir, para enteros no negativos  $n_1, \dots, n_m$  tales que  $n_1 + \dots + n_m = n$ , se tiene que

$$P(N_1 = n_1, \dots, N_m = n_m | N = n) = \binom{n}{n_1 \dots n_m} p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}.$$

La distribución no condicional del vector  $(N_1, \dots, N_m)$  es el contenido del siguiente resultado.

**Proposición 9** *Las variables aleatorias  $N_1, \dots, N_m$  son independientes y cada variable  $N_k$  tiene distribución Poisson( $\lambda p_k$ ).*

*Demostración.* Sean  $n_1, \dots, n_m$  enteros no negativos tales que  $n_1 + \dots + n_m = n$ . Entonces

$$\begin{aligned} P(N_1 = n_1, \dots, N_m = n_m) &= P(N_1 = n_1, \dots, N_m = n_m, N = n) \\ &= P(N_1 = n_1, \dots, N_m = n_m | N = n) P(N = n) \\ &= \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\ &= \prod_{k=1}^m \frac{(\lambda p_k)^{n_k}}{n_k!} e^{-\lambda p_k}. \end{aligned}$$

Se desprende de esta igualdad que  $N_k$  tiene distribución marginal Poisson( $\lambda p_k$ ), y además se verifica la independencia.  $\square$

Como los montos de las reclamaciones son independientes de  $N$ , el riesgo de tipo  $k$  está dado por

$$S_k = \sum_{j=1}^N Y_j \cdot 1_{\{Y_j \in A_k\}}$$

y tiene distribución Poisson compuesta con parámetro  $\lambda p_k$ . La distribución condicional del monto de las reclamaciones de este riesgo es

$$\begin{aligned} G_k(x) &= P(Y_j \leq x | Y_j \in A_k) \\ &= \frac{P(Y_j \leq x, Y_j \in A_k)}{P(Y_j \in A_k)}. \end{aligned}$$

En particular, cuando  $A_k = (x_{k-1}, x_k]$  con  $0 < x_0 < x_1 < \dots < x_m$ , para  $x \in (x_{k-1}, x_k]$ ,

$$G_k(x) = \frac{G(x) - G(x_{k-1})}{G(x_k) - G(x_{k-1})}.$$

## Modelo Poisson compuesto mixto

Cuando el número de reclamaciones  $N$  tiene una distribución Poisson( $\Lambda$ ) y el parámetro  $\Lambda$  es a su vez una variable aleatoria, se dice que el riesgo  $S$  tiene una distribución *Poisson compuesta mixta*. Algunas características de esta distribución se muestran a continuación.

**Proposición 10 (Modelo Poisson compuesto mixto)** *Si  $N$  tiene una distribución Poisson( $\Lambda$ ) en donde  $\Lambda$  es una variable aleatoria con función de distribución  $H$  entonces*

$$a) P(N = n) = \int_0^\infty e^{-h} \frac{h^n}{n!} dH(h).$$

$$b) E(S) = E(\Lambda)\mu.$$

$$c) E(S^2) = E(\Lambda)\mu_2 + E(\Lambda^2)\mu^2.$$

$$d) E(S^3) = E(\Lambda)\mu_3 + 3E(\Lambda^2)\mu_2\mu + E(\Lambda^3)\mu^3.$$

$$e) \text{Var}(S) = \text{Var}(\Lambda)\mu^2 + E(\Lambda)\mu_2.$$

$$f) E[(S - E(S))^3] = E[(\Lambda - E(\Lambda))^3]\mu^3 + 3\text{Var}(\Lambda)\mu_2\mu + E(\Lambda)\mu_3.$$

$$g) M_S(r) = M_\Lambda(M_Y(r) - 1).$$

Para obtener todas las expresiones de esta proposición es suficiente condicionar sobre el valor de  $\Lambda$ .

### 1.3. Ejercicios

#### Modelo individual

1. Considere el modelo individual para un portafolio de  $n$  pólizas de seguros. Bajo la notación e hipótesis usuales, demuestre que el número esperado de reclamaciones es

$$\sum_{j=1}^n q_j.$$

2. Considere el modelo individual para un portafolio de  $n$  pólizas de seguros de vida. Suponga que el  $j$ -ésimo asegurado tiene una suma asegurada constante  $z_j$ . Demuestre que

$$a) E(S) = \sum_{j=1}^n q_j z_j.$$

$$b) \text{Var}(S) = \sum_{j=1}^n q_j p_j z_j^2.$$

3. Encuentre una expresión para  $E(S^2)$  y  $E(S^3)$  cuando  $S$  sigue un modelo individual de riesgo.
4. Considere un portafolio de 21 pólizas individuales de seguros de vida válidas por un año como se indica en la siguiente tabla.

Tasa de mortalidad $q_j$	Suma asegurada			
	\$2	\$3	\$4	\$5
0.04	1	1	2	1
0.05	0	2	3	3
0.06	1	1	2	4

Usando el modelo individual calcule  $E(S)$  y  $\text{Var}(S)$ .

5. Sean  $q_{j,0}$ ,  $q_{j,1}$  y  $q_{j,2}$  las probabilidades de que el  $j$ -ésimo asegurado presente 0, 1 y 2 reclamaciones respectivamente durante el tiempo de vigencia del seguro. Suponga que cada una de las posibles reclamaciones de la póliza  $j$  es constante  $z_j$  y que

$$q_{j,0} + q_{j,1} + q_{j,2} = 1.$$

Encuentre fórmulas para  $E(S)$  y  $\text{Var}(S)$  en el modelo individual.

6. Una compañía aseguradora tiene una cartera con pólizas de seguros de vida y diferentes sumas aseguradas como se muestra en la siguiente tabla.

Suma asegurada	Número de pólizas	Probabilidad de reclamación
\$10,000	1,000	0.0040
\$20,000	1,500	0.0035
\$30,000	2,500	0.0030

Calcule  $E(S)$  y  $\text{Var}(S)$  usando el modelo individual.

### Modelo colectivo

7. Considere el modelo colectivo de riesgo  $S = \sum_{j=1}^N Y_j$  en donde  $N$  tiene distribución Poisson( $\lambda$ ) y  $Y$  sigue una distribución log normal( $m, \sigma^2$ ). Demuestre que

- $E(Y) = \exp(\sigma^2/2 + m)$ .
- $\text{Var}(Y) = (e^{\sigma^2} - 1) \exp(\sigma^2 + 2m)$ .
- $\mu_n = \exp(nm + n^2\sigma^2/2)$ .
- $E(S) = \lambda \exp(\sigma^2/2 + m)$ .
- $\text{Var}(S) = \lambda \exp(2\sigma^2 + 2m)$ .
- $\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \exp(3\sigma^2/2)$ .

### Modelo binomial compuesto

- Compruebe las fórmulas de la Proposición 4 de la página 12.
- Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos riesgos independientes con distribución binomial compuesta con parámetros  $(n_1, p)$  y  $(n_2, p)$  respectivamente. Suponga que los montos de las reclamaciones de cada uno de estos riesgos son  $Y^{(1)}$  y  $Y^{(2)}$  con idéntica distribución  $G(x)$ . Demuestre que el riesgo  $S = S_1 + S_2$  también sigue una distribución binomial compuesta con parámetros  $(n_1 + n_2, p)$  y la distribución del monto de las reclamaciones para  $S$  es nuevamente  $G(x)$ .

## Modelo binomial negativo compuesto

10. Compruebe las fórmulas de la Proposición 5 de la página 13.

## Modelo Poisson compuesto

11. Compruebe las fórmulas de la Proposición 6 de la página 13.
12. Compruebe las fórmulas de la Proposición 7 de la página 15.
13. Sean  $F_1$  y  $F_2$  dos funciones de distribución con funciones generadoras de momentos  $M_1$  y  $M_2$  respectivamente. Demuestre que para cualquier  $\alpha \in [0, 1]$ , la función  $\alpha F_1 + (1 - \alpha)F_2$  es una función de distribución cuya función generadora de momentos asociada es  $\alpha M_1 + (1 - \alpha)M_2$ . Este resultado fue utilizado en el análisis de la suma de dos riesgos con distribución Poisson compuesta.
14. Sean  $S_1, \dots, S_n$  riesgos independientes con distribución Poisson compuesta con parámetros  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , respectivamente. Suponga que los montos de las reclamaciones de estos riesgos son  $Y^{(1)}, \dots, Y^{(n)}$ , con función de distribución  $G_1(x), \dots, G_n(x)$ , respectivamente. Demuestre que el riesgo  $S = S_1 + \dots + S_n$  también sigue una distribución Poisson compuesta con parámetro  $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ , y la función de distribución de las reclamaciones de  $S$  es

$$G(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda} G_1(x) + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} G_n(x).$$

15. Sean  $X_0, X_1, X_2, \dots$  independientes tales que  $X_i$  tiene distribución Bernoulli( $q$ ) para  $i \geq 1$  y  $X_0 = 0$ . Sea  $N$  con distribución Poisson( $\lambda$ ) independiente de las variables  $X$ . Defina

$$X = \sum_{i=0}^N X_i.$$

Demuestre que  $X$  tiene distribución Poisson( $\lambda q$ ). Esta variable tiene la siguiente interpretación: si  $N$  representa el total de siniestros ocurridos y cada siniestro es reportado con probabilidad  $q$ , entonces  $X$  representa el total de siniestros ocurridos reportados.

16. Sea  $Y$  una variable aleatoria con función de distribución  $F$  y sean  $a < b$  tales que  $F(a) < F(b)$ . Demuestre que la función de distribución condicional de  $Y$  dado el evento  $(X \in (a, b])$  es

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases}$$

Este resultado fue utilizado en la siguiente afirmación: si el monto de una reclamación  $Y$  tiene función de distribución  $F$  entonces  $Y$  tiene función de distribución condicional  $G(x)$  dado que la reclamación  $Y$  toma valores en el intervalo  $(a, b]$ .

## Capítulo 2

# Fórmula de Panjer y algunos métodos de aproximación

En este capítulo se presenta la famosa fórmula de Panjer. Este resultado proporciona una expresión exacta, aunque recursiva, de la distribución de probabilidad de un riesgo en el modelo colectivo, y es válida cuando la distribución del número de reclamaciones y los montos cumplen ciertas condiciones. Se presentan además algunos métodos de aproximación generales para estimar la distribución de un riesgo.

### 2.1. Fórmula de recursión de Panjer

Primeramente se enuncia la condición que debe satisfacer el número de reclamaciones  $N$  para obtener la fórmula de Panjer.

**Proposición 11** Sea  $N$  una variable aleatoria discreta con valores en  $\{0, 1, \dots\}$  y sea  $p_k = P(N = k)$ . Entonces la igualdad

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right)p_{k-1} \quad (2.1)$$

se cumple cuando

a)  $N$  es  $\text{bin}(n, p)$  con  $a = -p/(1-p)$  y  $b = (n+1)p/(1-p)$ .

b)  $N$  es  $\text{Poisson}(\lambda)$  con  $a = 0$  y  $b = \lambda$ .

c)  $N$  es  $\text{bin neg}(\alpha, p)$  con  $a = 1-p$  y  $b = (\alpha-1)(1-p)$ .

La demostración de este resultado es inmediata después de algunos cálculos aritméticos sencillos. Supondremos entonces que el número de reclamaciones  $N$  cumple con la condición (2.1) y la proposición establece entonces que tal condición es válida para las tres distribuciones señaladas.

Asumiremos también que las reclamaciones  $Y_j$  son tales que  $P(Y_j \in \mathbb{N}) = 1$ . En los cálculos siguientes usaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} p_k &= P(N = k), \\ f_r &= P(Y = r), \\ g_r &= P(S = r), \\ f_r^{*k} &= P(Y_1 + \dots + Y_k = r). \end{aligned}$$

En particular

$$f_r^{*(k+1)} = (f^{*k} * f)_r = \sum_{i=1}^{r-1} f_i^{*k} f_{r-i}.$$

Además

$$g_0 = P(S = 0) = P(N = 0) = p_0,$$

y para  $r \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} g_r &= P(S = r) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(S = r | N = k)P(N = k) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_r^{*k} p_k.$$

**Lema 1** *Bajo la notación e hipótesis anteriores, se cumplen las siguiente propiedades:*

$$a) E( Y_1 | \sum_{i=1}^k Y_i = r ) = \frac{r}{k}, \text{ para } k \geq 1.$$

$$b) p_k f_r^{*k} = p_{k-1} \sum_{i=1}^{r-1} \left( a + \frac{bi}{r} \right) f_{r-i}^{*(k-1)} f_i, \text{ para } k \geq 2.$$

*Demostración.* Para el primer inciso,

$$\begin{aligned} E( Y_1 | \sum_{i=1}^k Y_i = r ) &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k E( Y_j | \sum_{i=1}^k Y_i = r ) \\ &= \frac{1}{k} E( \sum_{j=1}^k Y_j | \sum_{i=1}^k Y_i = r ) \\ &= \frac{r}{k}. \end{aligned}$$

Para el segundo inciso desarrollamos el lado derecho,

$$\begin{aligned} p_{k-1} \sum_{i=1}^{r-1} \left( a + \frac{bi}{r} \right) f_{r-i}^{*(k-1)} f_i &= p_{k-1} \sum_{i=1}^r \left( a + \frac{bi}{r} \right) P(Y_2 + \dots + Y_k = r - i) P(Y_1 = i) \\ &= p_{k-1} \sum_{i=1}^r \left( a + \frac{bi}{r} \right) P(Y_1 = i, Y_2 + \dots + Y_k = r - i) \\ &= p_{k-1} \sum_{i=1}^r \left( a + \frac{bi}{r} \right) P(Y_1 = i, \sum_{j=1}^k Y_j = r) \\ &= p_{k-1} \sum_{i=1}^r \left( a + \frac{bi}{r} \right) P(Y_1 = i | \sum_{j=1}^k Y_j = r) f_r^{*k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p_{k-1} E\left(a + \frac{bY_1}{r} \mid \sum_{j=1}^k Y_j = r\right) f_r^{*k} \\
&= p_{k-1} \left(a + \frac{b}{k}\right) f_r^{*k} \\
&= p_k f_r^{*k}
\end{aligned}$$

□

Ahora estamos listos para enunciar y demostrar la fórmula de Panjer, demostrada en 1981.

**Teorema 1 (Fórmula de recursión de Panjer)** *Considerando el modelo colectivo de riesgo, y bajo las hipótesis y notación arriba enunciados, la probabilidad  $g_r = P(S = r)$  está dada por*

$$\begin{aligned}
g_0 &= p_0, \\
y \quad g_r &= \sum_{i=1}^r \left(a + \frac{bi}{r}\right) f_i g_{r-i}, \quad \text{para } r \geq 1.
\end{aligned}$$

*Demostración.* Para  $r \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
g_r &= \sum_{k=1}^{\infty} P(S = r \mid N = k) P(N = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p_k f_r^{*k} \\
&= p_1 f_r + \sum_{k=2}^{\infty} p_k f_r^{*k} \\
&= (a + b)p_0 f_r + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{k-1} \left(a + \frac{bi}{k}\right) p_{k-1} f_{r-i}^{*(k-1)} f_i \\
&= (a + b)p_0 f_r + \sum_{i=1}^{r-1} \left(a + \frac{bi}{r}\right) f_i \sum_{k=2}^{\infty} p_{k-1} f_{r-i}^{*(k-1)}
\end{aligned}$$

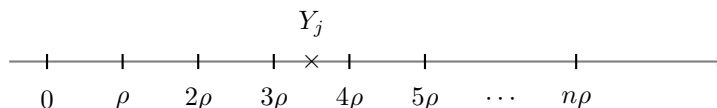
$$\begin{aligned}
&= (a+b)p_0f_r + \sum_{i=1}^{r-1} \left(a + \frac{bi}{r}\right) f_i g_{r-i} \\
&= \sum_{i=1}^r \left(a + \frac{bi}{r}\right) f_i g_{r-i}.
\end{aligned}$$

□

En el caso cuando falla la hipótesis de que el monto de las reclamaciones sean números enteros positivos, puede usarse la fórmula de Panjer para encontrar cotas para la distribución del riesgo. Para ello se toma cualquier  $\rho > 0$  y se define

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_j &= \inf\{n \in \mathbb{N} : Y_j \leq n\rho\}, \\
\text{y } \underline{Y}_j &= \sup\{n \in \mathbb{N} : Y_j \geq n\rho\},
\end{aligned}$$

en donde  $\inf \emptyset = 0$ . Por ejemplo, para la situación que se muestra en la siguiente figura



se tiene que  $\bar{Y}_j = 4$  y  $\underline{Y}_j = 3$ . Se definen entonces los riesgos

$$\begin{aligned}
\bar{S} &= \sum_{j=1}^N \bar{Y}_j, \\
\text{y } \underline{S} &= \sum_{j=1}^N \underline{Y}_j,
\end{aligned}$$

cuyas reclamaciones ahora son enteras. Observe que  $\rho\underline{S} \leq S \leq \rho\bar{S}$ . Por lo tanto  $P(\rho\bar{S} \leq x) \leq P(S \leq x) \leq P(\rho\underline{S} \leq x)$ , es decir,

$$P(\bar{S} \leq x/\rho) \leq P(S \leq x) \leq P(\underline{S} \leq x/\rho).$$

En las siguientes secciones estudiaremos algunas fórmulas generales para aproximar la distribución de probabilidad de un riesgo en el modelo colectivo.

## 2.2. Aproximación normal

Si el número de reclamaciones  $N$  es grande entonces el teorema del límite central sugiere aproximar la distribución del riesgo  $S$  mediante la distribución normal. Es decir, para  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} P(S \leq x) &= P\left(\frac{S - E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}} \leq \frac{x - E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{x - E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right). \end{aligned}$$

Substituyendo las expresiones generales para la esperanza y varianza de  $S$  se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 12 (Aproximación normal)** *Para cualquier  $x > 0$ ,*

$$P(S \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - E(N)\mu}{\sqrt{\text{Var}(N)\mu^2 + E(N)\text{Var}(Y)}}\right). \quad (2.2)$$

Se puede particularizar esta aproximación cuando la distribución de  $N$  es conocida. Cuando el número de reclamaciones  $N$  sigue una distribución Poisson con parámetro  $\lambda$ , la aproximación (2.2) adquiere la expresión simple

$$P(S \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda\mu^2}}\right).$$

Cuando  $N$  es  $\text{bin}(n, p)$ , (2.2) se escribe

$$P(S \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - np\mu}{\sqrt{np(\mu^2 - \mu^2 p)}}\right).$$

En el caso cuando  $N$  es  $\text{bin. neg.}(\alpha, p)$  se tiene que (2.2) es

$$P(S \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - \alpha(1-p)\mu/p}{\sqrt{\alpha(1-p)[\mu^2/p + (1-p)\mu^2/p^2]}}\right).$$

### 2.3. Aproximación gama trasladada

Esta aproximación consiste en sustituir el riesgo  $S$  por la variable aleatoria  $k + Z$ , en donde  $k$  es una constante y  $Z$  es una variable aleatoria con distribución  $\text{gama}(\gamma, \alpha)$ . Para ello se deben escoger adecuadamente valores para los tres parámetros  $k, \gamma$  y  $\alpha$  que determinan la distribución de  $k + Z$ . Supongamos conocidos los siguientes parámetros

- a)  $E(S) = m$ .
- b)  $\text{Var}(S) = \sigma^2$ .
- c)  $\frac{E[(S - E(S))^3]}{[\text{Var}(S)]^{3/2}} = \alpha_3$ .

La correspondiente media, varianza y coeficiente de asimetría de la variable  $k + Z$  es

- a)  $E(k + Z) = k + \gamma/\alpha$ .
- b)  $\text{Var}(k + Z) = \gamma/\alpha^2$ .
- c)  $\frac{E[(k + Z - E(k + Z))^3]}{[\text{Var}(k + Z)]^{3/2}} = 2/\sqrt{\gamma}$ .

Haciendo coincidir estas tres cantidades para ambas variables aleatorias se obtiene el sistema de ecuaciones

$$k + \frac{\gamma}{\alpha} = m, \quad \frac{\gamma}{\alpha^2} = \sigma^2, \quad \frac{2}{\sqrt{\gamma}} = \alpha_3,$$

cuya solución es

$$k = m - \frac{2\sigma}{\alpha_3}, \quad \gamma = \frac{4}{\alpha_3^2}, \quad \alpha = \frac{2}{\sigma\alpha_3}.$$

De esta forma se tiene la aproximación siguiente.

**Proposición 13 (Aproximación gama trasladada)** *El riesgo  $S$  tiene distribución aproximada*

$$m - \frac{2\sigma}{\alpha_3} + \text{gama}\left(\frac{4}{\alpha_3^2}, \frac{2}{\sigma\alpha_3}\right).$$

## 2.4. Aproximación de Edgeworth

Considere un cierto riesgo  $S$  y defina la variable  $Z = (S - E(S))/\sqrt{\text{Var}(S)}$ . Suponga que la función generadora de momentos de  $Z$  existe y es  $M_Z(r)$ . La serie de Taylor de  $\ln M_Z(r)$  alrededor de cero es

$$\ln M_Z(r) = a_0 + a_1 r + \frac{a_2}{2!} r^2 + \frac{a_3}{3!} r^3 + \frac{a_4}{4!} r^4 + \dots$$

en donde

$$a_k = \left. \frac{d^k}{dr^k} \ln M_Z(r) \right|_{r=0}.$$

En particular

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= E(Z) = 0, \\ a_2 &= \text{Var}(Z) = 1, \\ a_3 &= E[(Z - E(Z))^3], \\ a_4 &= \frac{E[(S - E(S))^4]}{\text{Var}^2(S)} - 3. \end{aligned}$$

La aproximación de Edgeworth consiste en truncar la serie de Taylor de  $\ln M_Z(r)$ . Por ejemplo, la aproximación hasta la cuarta potencia de  $r$  es:

$$\ln M_Z(r) \approx \frac{r^2}{2!} + \frac{a_3}{3!} r^3 + \frac{a_4}{4!} r^4.$$

Entonces

$$\begin{aligned} M_Z(r) &\approx \exp\left(\frac{r^2}{2!} + \frac{a_3}{3!} r^3 + \frac{a_4}{4!} r^4\right) \\ &= e^{r^2/2} \cdot \exp\left(\frac{a_3}{6} r^3 + \frac{a_4}{24} r^4\right). \end{aligned}$$

Ahora se usa la serie  $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots$  en el segundo factor y se obtiene

$$\begin{aligned} M_Z(r) &\approx e^{r^2/2} \cdot \left(1 + \frac{a_3}{6}r^3 + \frac{a_4}{24}r^4 + \frac{a_3^2}{72}r^6\right) \\ &= e^{r^2/2} + \frac{a_3}{6}r^3 e^{r^2/2} + \frac{a_4}{24}r^4 e^{r^2/2} + \frac{a_3^2}{72}r^6 e^{r^2/2}. \end{aligned}$$

El siguiente paso es *invertir* cada término de esta ecuación encontrando la distribución correspondiente. Primeramente tenemos que

$$e^{r^2/2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} \phi(x) dx,$$

en donde  $\phi(x)$  es la función de densidad de la distribución normal estándar. Es decir  $e^{r^2/2}$  es la f.g.m. de la distribución  $N(0, 1)$ . Multiplicando por  $r$  tenemos que

$$\begin{aligned} r e^{r^2/2} &= \int_{-\infty}^{\infty} r e^{rx} \phi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} e^{rx}\right) \phi(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} \phi'(x) dx. \end{aligned}$$

Lo anterior dice que  $r e^{r^2/2}$  es la transformada de Laplace de  $-\phi'(x)$ . Mediante este procedimiento se puede demostrar que para cualquier número natural  $n$ ,

$$r^n e^{r^2/2} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} \phi(x)^{(n)} dx,$$

indicando nuevamente que  $r^n e^{r^2/2}$  es la transformada de Laplace de  $(-1)^n \phi(x)^{(n)}$ . Por lo tanto

$$f_Z(z) \approx \phi(z) - \frac{a_3}{6} \phi^{(3)}(z) + \frac{a_4}{24} \phi^{(4)}(z) + \frac{a_3^2}{72} \phi^{(6)}(z).$$

Integrando obtenemos

$$F_Z(z) \approx \Phi(z) - \frac{a_3}{6} \Phi^{(3)}(z) + \frac{a_4}{24} \Phi^{(4)}(z) + \frac{a_3^2}{72} \Phi^{(6)}(z),$$

en donde derivando directamente se puede demostrar que

$$\begin{aligned}\Phi^{(3)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(z^2 - 1)e^{-z^2/2}, \\ \Phi^{(4)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-z^3 + 3z)e^{-z^2/2}, \\ \Phi^{(6)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-z^5 + 10z^3 - 15z)e^{-z^2/2}.\end{aligned}$$

## 2.5. Ejercicios

### Aproximación normal

17. Encuentre nuevamente la aproximación normal para  $P(S \leq x)$  cuando  $N$  tiene distribución
  - a) Poisson( $\lambda$ ).
  - b) bin( $n, p$ ).
  - c) bin neg( $r, p$ ).
18. Suponga que un cierto riesgo  $S$  tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro  $\lambda = 30$  en donde los montos de las reclamaciones siguen una distribución uniforme(0, 10). Use la aproximación normal para encontrar el valor de la prima  $p$  tal que
  - a)  $P(S > p) \leq 0.05$ .
  - b)  $P(S > p) \leq 0.01$ .
19. Suponga que un riesgo  $S$  sigue una distribución Poisson compuesta con parámetro  $\lambda = 20$  y los montos de las reclamaciones tienen distribución exp( $\lambda$ ) con  $\lambda = 10$ . Use la aproximación normal para estimar la probabilidad  $P(S > E(S))$ .
20. Suponga que un riesgo  $S$  sigue una distribución Poisson compuesta con parámetro  $\lambda = 20$  y los montos de las reclamaciones tienen distribución Pareto(4, 3). Compruebe que el valor de la prima  $p$  que cumple  $P(S > p) \leq 0.01$  es  $p = 38.0194$ .

## Aproximación gama trasladada

21. Considerando la notación e hipótesis en la aproximación gama trasladada, demuestre que la media, varianza y coeficiente de asimetría de  $k + Z$  es  $k + \gamma/\alpha$ ,  $\gamma/\alpha^2$  y  $2/\sqrt{\gamma}$  respectivamente.
22. Encuentre una expresión para la aproximación gama trasladada cuando el riesgo sigue una distribución Poisson compuesta, binomial compuesta y binomial negativa compuesta.
23. Durante la derivación de la aproximación gama trasladada se usa el hecho de que la variable aleatoria  $k + Z$ , en donde  $Z$  tiene una distribución  $\text{gamma}(\gamma, \alpha)$ , tiene media, varianza y coeficiente de asimetría  $k + \gamma/\alpha$ ,  $\gamma/\alpha^2$  y  $2/\sqrt{\gamma}$  respectivamente. Demuestre estas fórmulas.
24. Durante la derivación de la aproximación gama trasladada se llega al sistema de ecuaciones  $k + \gamma/\alpha = m$ ,  $\gamma/\alpha^2 = \sigma^2$  y  $2/\sqrt{\gamma} = \alpha_3$ , en donde  $k$ ,  $\gamma$  y  $\alpha$  son las incógnitas. Demuestre que la solución a este sistema es  $k = m - 2\sigma/\alpha_3$ ,  $\gamma = 4/\alpha_3^2$  y  $\alpha = 2/\sigma\alpha_3$ .
25. Encuentre la aproximación gamma trasladada para la distribución de  $S$  cuando
  - a)  $N \sim \text{bin}(n, p)$ .
  - b)  $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ .
  - c)  $N \sim \text{bin neg}(\alpha, p)$ .
26. Suponga que  $Z$  tiene una distribución  $\text{gamma}(\gamma, \alpha)$ . Demuestre que si  $2\gamma$  es un número entero natural entonces  $2\alpha Z$  tiene una distribución  $\chi^2(2\gamma)$ .
27. Suponga que el riesgo  $S$  tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro  $\lambda > 0$ . Demuestre que los parámetros para usar la aproximación gama trasladada son

$$\begin{aligned}k &= \lambda(\mu - 2\mu_2^2/\mu_3), \\ \gamma &= 4\lambda\mu_2^3/\mu_3^2, \\ \alpha &= 2\mu_2/\mu_3.\end{aligned}$$

## Aproximación de Edgeworth

28. Suponga que  $S$  tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro  $\lambda > 0$  y que se desea usar la aproximación de Edgeworth para  $S$ . Demuestre que

$$a_k = \left. \frac{d^k}{dr^k} \ln M_Z(r) \right|_{r=0} = \lambda \mu_k (\lambda \mu_2)^{-k/2}, \quad \text{para } k \geq 2.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} P(S \leq x) \approx & \Phi\left(\frac{x - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda\mu_2}}\right) - \frac{\lambda\mu_3(\lambda\mu_2)^{-3/2}}{6} \Phi^{(3)}\left(\frac{x - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda\mu_2}}\right) \\ & + \frac{\lambda\mu_4(\lambda\mu_2)^{-2}}{24} \Phi^{(4)}\left(\frac{x - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda\mu_2}}\right) \\ & + \frac{\lambda^2\mu_3^2(\lambda\mu_2)^{-3}}{72} \Phi^{(6)}\left(\frac{x - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda\mu_2}}\right). \end{aligned}$$

29. Suponga que  $S$  tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro  $\lambda > 0$  y que se desea usar la aproximación de Edgeworth para  $S$ . Suponga adicionalmente que el monto de las reclamaciones siguen una distribución Pareto(4, 3). Demuestre que  $\mu_4 = \infty$ , y por lo tanto la fórmula del ejercicio anterior no puede aplicarse.

## Capítulo 3

# Principios para el cálculo de primas

En este capítulo se estudian algunos principios generales para calcular el valor de la prima que debe cobrarse para cubrir un cierto riesgo de tal forma que el negocio del seguro funcione.

### 3.1. Principios generales

Considere un seguro en donde se cobra una misma prima  $p$  por cada uno de los  $n$  años de vigencia. Suponga que  $S_j$  representa las reclamaciones efectuadas durante el año  $j$ , las cuales se asumen independientes e idénticamente distribuidas. Si  $u$  es el capital inicial de la aseguradora, entonces el capital de la misma al final del  $n$ -ésimo año es

$$X_n = u + np - \sum_{j=1}^n S_j.$$

Tomando esperanza de la ecuación anterior se obtiene

$$E(X_n) = u + n[p - E(S_1)].$$

Puede demostrarse que a largo plazo la variable  $X_n$  tiene el siguiente comportamiento:

- a) Si  $p < E(S)$  entonces  $X_n \xrightarrow{c.s.} -\infty$ .
- b) Si  $p = E(S)$  entonces  $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = -\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty$  c.s.
- c) Si  $p > E(S)$  entonces  $X_n \xrightarrow{c.s.} \infty$  y  $P(X_n \geq 0 \text{ para cada } n \text{ en } \mathbb{N}) > 0$ .

Dado este resultado, es natural entonces suponer  $p > E(S)$ . Esta condición se conoce con el nombre de *condición de ganancia neta*<sup>1</sup> y debe prevalecer en cualquier método para calcular  $p$ . Veamos ahora algunos principios generales.

## Principio del valor esperado

Para alguna constante  $\theta > 0$ , llamada *factor de recargo*<sup>2</sup>, se define

$$p = (1 + \theta)E(S).$$

## Principio de la varianza

Para alguna constante  $\theta > 0$ , se define

$$p = E(S) + \theta \text{Var}(S).$$

## Principio de la desviación estándar

Para alguna constante  $\theta > 0$ , se define

$$p = E(S) + \theta \sqrt{\text{Var}(S)}.$$

## Principio de utilidad cero

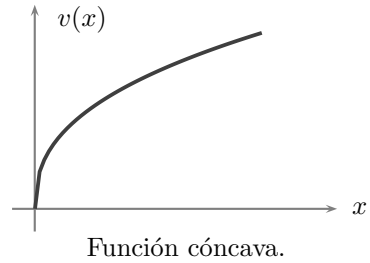
Este principio hace uso de una *función de utilidad*, esto es, una función  $v(x)$  que cumpla las siguientes propiedades:

---

<sup>1</sup>net profit condition.

<sup>2</sup>safety loading.

- a)  $v(0) = 0$ .
- b)  $v(x)$  es estrictamente creciente.
- c)  $v(x)$  es estrictamente cóncava.



El principio de utilidad cero establece que la prima es aquel número  $p$  que satisface la ecuación

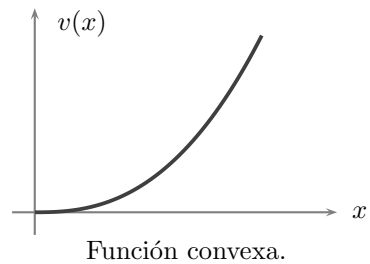
$$v(u) = E[v(u + p - S)]. \tag{3.1}$$

Es decir, la utilidad que representa para la aseguradora el capital inicial  $u$  debe ser idéntica a la utilidad esperada al cubrir el riesgo. Se puede demostrar que si existe solución a (3.1), ésta es única y que si  $S$  no es constante, es decir  $P(S = E(S)) < 1$ , entonces  $p > E(S)$ .

## Principio del valor medio

Este principio hace uso de una *función de valor*, esto es, una función  $v(x)$  que cumpla las siguientes propiedades:

- a)  $v(0) = 0$ .
- b)  $v(x)$  es estrictamente creciente.
- c)  $v(x)$  es estrictamente convexa.



La prima  $p$  se calcula entonces según la ecuación

$$v(p) = E[v(S)]. \tag{3.2}$$

Usando la desigualdad de Jensen puede demostrarse que si  $P(S = E(S)) < 1$  entonces  $p > E(S)$ .

## Principio exponencial

Este es el principio de utilidad cero aplicado a la función de utilidad particular  $u(x) = 1 - e^{-\alpha x}$  con  $\alpha > 0$ . La prima se calcula como aquel valor de  $p$  que es solución de la ecuación

$$1 - e^{-\alpha u} = E[1 - e^{-\alpha(u+p-S)}].$$

De esta igualdad se obtiene fácilmente la expresión

$$p = \frac{1}{\alpha} \ln M_S(\alpha). \quad (3.3)$$

Observe que  $p$  es independiente del capital inicial  $u$ . El principio exponencial corresponde también al principio del valor medio aplicado a la función de valor particular  $v(x) = e^{\alpha x} - 1$  con  $\alpha > 0$ . Bajo este principio la igualdad

$$e^{\alpha p} - 1 = E(e^{\alpha S} - 1)$$

determina la misma solución (3.3).

## Principio del porcentaje

Para alguna  $\epsilon > 0$  pequeña se define

$$p = \inf\{x > 0 : P(S > x) \leq \epsilon\}.$$

A este principio también se le conoce también como *principio de pérdida máxima*.

### 3.2. Propiedades

En esta sección se enuncian algunas propiedades generales que son deseables que posea cualquier método para calcular primas.

*Simplicidad.* El cálculo de la prima debe ser fácil de calcular, por ejemplo, los principios del valor esperado, el de la varianza y el de la desviación estándar cumplen esta primera propiedad.

*Consistencia.* Si un riesgo se incrementa en una constante entonces la prima debe reflejar ese cambio incrementándose en la misma cantidad. Los principios de varianza, de la desviación estándar, de utilidad cero y el principio exponencial cumplen con esta propiedad.

*Aditividad.* La prima de un portafolio consistente en dos riesgos independientes debe ser la suma de las primas individuales. Los principios de valor esperado, el de la varianza y el principio exponencial cumplen esta propiedad.

### 3.3. Ejercicios

#### Principios

30. Sean  $a > 0$  y  $\alpha > 0$  constantes. Demuestre que la función  $v(x) = a(1 - e^{-\alpha x})$  definida para  $x \geq 0$ , es una función de utilidad y que usada bajo el principio de utilidad cero determina que la prima para cubrir un riesgo  $S$  debe ser

$$p = \frac{1}{\alpha} \ln M_S(\alpha).$$

#### Propiedades

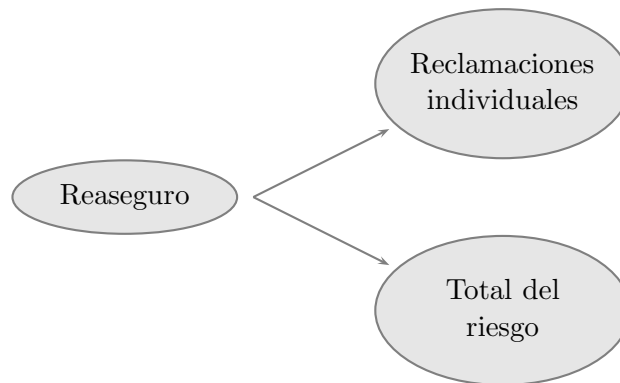
31. Demuestre que los siguientes principios cumplen con la propiedad de consistencia: varianza, desviación estándar, utilidad cero, exponencial, porcentaje.
32. Demuestre que los siguientes principios cumplen con la propiedad de aditividad: esperanza, varianza, exponencial.

## Capítulo 4

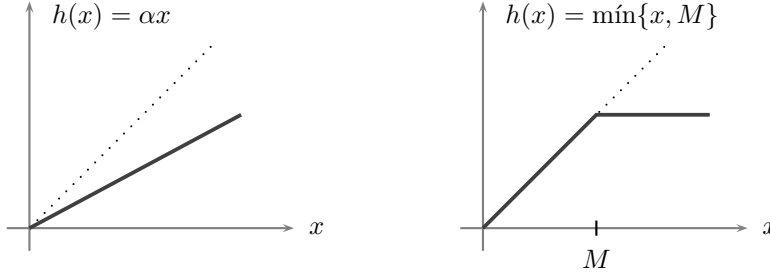
# Reaseguro

El *reaseguro* consiste en compartir un riesgo con otras compañías aseguradoras llamadas *reaseguradoras*. Las razones por las que una aseguradora desee compartir un riesgo con una reaseguradora son varias. El reaseguro ayuda a evitar fuertes montos en las reclamaciones pero naturalmente disminuyen el ingreso por primas.

En este capítulo se estudian algunas ideas simples y generales del reaseguro. Considere un riesgo  $S$  y denote por  $S^I$  la parte del riesgo asumido por el asegurador y sea  $S^R$  la parte asumida por el reasegurador. Las letras I y R indican los términos *Insurer* y *Reinsurer* respectivamente. Claramente debe cumplirse la igualdad  $S = S^I + S^R$ . El reaseguro puede tomar por lo menos dos perspectivas: actuar sobre las reclamaciones individuales o sobre el total del riesgo.



En ambos esquemas el reaseguro se aplica mediante una función  $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  tal que  $h(0) = 0$  y  $h(x) \leq x$ . Las dos funciones de este tipo que consideraremos son  $h(x) = \alpha x$  para  $\alpha \in (0, 1)$  y  $h(x) = \min\{x, M\}$  para alguna constante  $M > 0$ . Gráficamente estas funciones se muestran a continuación.



#### 4.1. Reaseguro aplicado a cada reclamación

Dado un riesgo  $S$  y cierta función  $h$  se define

$$S^I = \sum_{j=1}^N h(Y_j).$$

Las formas comunes de reaseguro de este tipo son el reaseguro proporcional y el reaseguro por exceso de pérdida (*excess of loss*) que se definen a continuación.

1. *Reaseguro proporcional*: Se toma  $h(x) = \alpha x$  para alguna constante  $\alpha \in [0, 1]$  y se define

$$S^I = \sum_{j=1}^N \alpha Y_j.$$

2. *Reaseguro por exceso de pérdida (excess of loss)*: Se toma  $h(x) = \min\{x, M\}$  para alguna constante  $M \geq 0$  y se define

$$S^I = \sum_{j=1}^N \min\{Y_j, M\}.$$

## 4.2. Reaseguro aplicado al total del riesgo

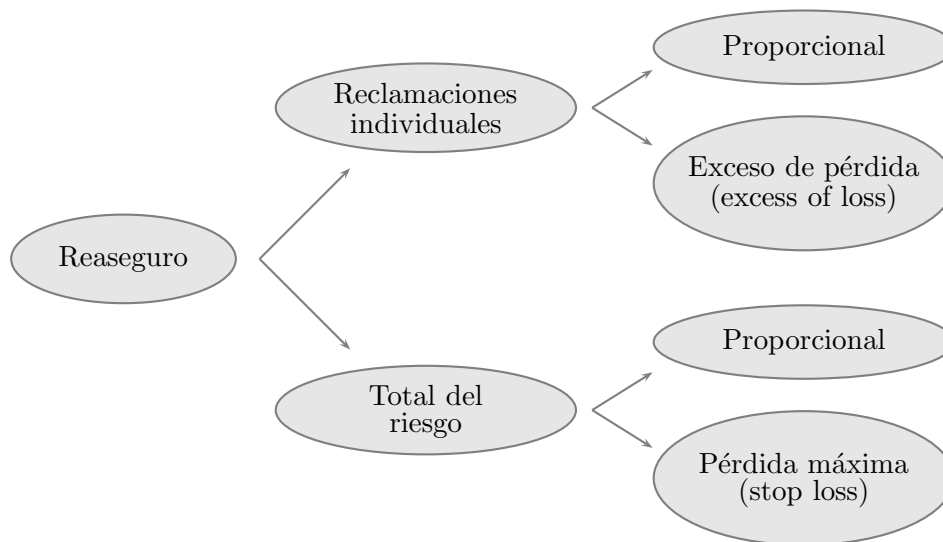
Para un riesgo  $S$  y cierta función  $h$  se define

$$S^I = h(S).$$

Los ejemplos más comunes de este tipo de reaseguro son el reaseguro proporcional y el reaseguro de pérdida máxima (stop loss).

1. *Reaseguro proporcional*: Se toma  $h(x) = \alpha x$  para alguna  $\alpha \in [0, 1]$  y se define  $S^I = \alpha S$ . Este tipo de reaseguro es idéntico al reaseguro proporcional aplicado a cada reclamación.
2. *Reaseguro de pérdida máxima (stop loss)*: Sea  $h(x) = \min\{x, M\}$  para alguna  $M \geq 0$ . Se define  $S^I = \min\{S, M\}$ .

De esta forma se tiene el siguiente diagrama:



### Sobre el reaseguro proporcional

Suponga que una compañía aseguradora adquiere un riesgo  $S$  durante un cierto periodo y por el cual cobra una prima  $p$ . Suponga un capital inicial

$u$ . La probabilidad de que la compañía aseguradora no pueda solventar el riesgo es

$$P(S > p + u).$$

Ahora suponga que la compañía decide reasegurarse mediante el esquema de reaseguro proporcional. De esta forma el asegurador obtiene  $\alpha p$  y el reasegurador  $(1 - \alpha)p$ . La probabilidad de que la aseguradora no pueda solventar el riesgo bajo este esquema es

$$\begin{aligned} P(\alpha S > \alpha p + u) &= P(S > p + u/\alpha) \\ &\leq P(S > p + u). \end{aligned}$$

De esta forma hemos comprobado que la probabilidad de insolvencia bajo el esquema de reaseguro proporcional es menor o igual a la probabilidad del mismo evento cuando no hay reaseguro.

Se enuncian a continuación algunas características numéricas de la variable  $S^I$  bajo el esquema de reaseguro proporcional. Existen fórmulas análogas para  $S^R$ .

**Proposición 14** *Para un reaseguro proporcional se cumplen las siguientes fórmulas:*

1.  $E(S^I) = \alpha E(S)$ .
2.  $Var(S^I) = \alpha^2 Var(S)$ .
3.  $\frac{E[(S^I - E(S^I))^3]}{[Var(S^I)]^{3/2}} = \frac{E[(S - E(S))^3]}{[Var(S)]^{3/2}}$ .
4.  $M_{S^I}(r) = M_S(\alpha r)$ .

*Demostración.* Estas expresiones se siguen directamente de la definición  $S^I = \alpha S$ . □

## Número de reclamaciones en un reaseguro por exceso de pérdida

Considere un reaseguro por exceso de pérdida (excess of loss) con nivel de retención  $M$ . Sea  $N^R$  el número de reclamaciones que un reasegurador afronta,

es decir,

$$N^R = \sum_{j=1}^N 1_{(Y_j > M)},$$

y defina  $N^I = N - N^R$ . Encontraremos a continuación la distribución de probabilidad tanto de  $N^R$  como de  $N^I$ , cuando la distribución de  $N$  es conocida para algunos casos particulares.

**Proposición 15** Sea  $q = P(Y_j > M)$ .

1. Si  $N$  tiene distribución  $\text{bin}(n, p)$  entonces
  - a)  $N^R \sim \text{bin}(n, qp)$ .
  - b)  $N^I \sim \text{bin}(n, (1 - q)p)$ .
2. Si  $N$  tiene distribución  $\text{Poisson}(\lambda)$  entonces
  - a)  $N^R \sim \text{Poisson}(q\lambda)$ .
  - b)  $N^I \sim \text{Poisson}((1 - q)\lambda)$ .
3. Si  $N$  tiene distribución  $\text{bin neg}(\alpha, p)$  entonces
  - a)  $N^R \sim \text{bin neg}(\alpha, p/(p + q - qp))$ .
  - b)  $N^I \sim \text{bin neg}(\alpha, p/(p + (1 - q) - (1 - q)p))$ .

*Demostración.* Se aplica la fórmula  $M_S(r) = M_N(\ln(M_Y(r)))$  cuando el riesgo  $S$  es la variable  $N^R$  y  $Y$  es  $1_{(Y_i > M)}$ . Primeramente  $M_Y(r) = E(e^{rY}) = 1 - q + qe^r$ . Entonces  $M_{N^R}(r) = M_N(\ln(1 - q + qe^r))$ . Para el inciso (1), cuando  $N$  tiene distribución  $\text{bin}(n, p)$  tenemos que  $M_N(r) = (1 - p + pe^r)^n$ . Por lo tanto

$$M_{N^R}(r) = (1 - p + p(1 - q + qe^r))^n = (1 - qp + qpe^r)^n.$$

Es decir  $N^R$  tiene distribución  $\text{bin}(n, qp)$  y análogamente puede verse que  $N^I$  tiene distribución  $\text{bin}(n, (1 - q)p)$ . De la misma forma se demuestran los incisos (2) y (3). Recuerde que si  $N$  tiene distribución  $\text{Poisson}(\lambda)$  entonces  $M_N(r) = \exp\{\lambda(e^r - 1)\}$  y cuando  $N$  es  $\text{bin neg}(\alpha, p)$  entonces  $M_N(r) = (p/(1 - (1 - p)e^r))^\alpha$ .  $\square$

### 4.3. Ejercicios

#### Reaseguro proporcional

33. Bajo el esquema de reaseguro proporcional de un cierto riesgo  $S$ , el riesgo asumido por el asegurador es  $S^I = \alpha S$  y la prima recibida es  $\alpha p$ . Suponga que el capital inicial de la aseguradora para afrontar dicho riesgo es  $u$ . Demuestre que la probabilidad de insolvencia  $P(\alpha S > \alpha p + u)$ , es una función monótona creciente de  $\alpha \in (0, 1)$ .

#### Reaseguro por exceso de pérdida

34. Considere un reaseguro por exceso de pérdida y sean  $N^R$  y  $N^I$  el número de reclamaciones afrontadas por el reasegurador y por el asegurador respectivamente.
- a) ¿Son  $N^R$  y  $N^I$  independientes?
  - b) ¿Son  $N$  y  $N^R$  independientes?
35. Considere un riesgo  $S$  con distribución Poisson compuesta de parámetro  $\lambda > 0$ . Asuma que cada reclamación  $Y$  tiene distribución Pareto( $\alpha, \beta$ ). Se adquiere un reaseguro por exceso de pérdida en donde la reclamación afrontada por la aseguradora es  $Y^I = \min\{Y, M\}$ . Demuestre que

a)  $E(Y^I) = [1 - (\frac{\beta}{\beta + M})^{\alpha-1}] E(Y)$ .

b)  $E(S^I) = [1 - (\frac{\beta}{\beta + M})^{\alpha-1}] E(S)$ .

36. Suponga que el monto de una reclamación  $Y$  para un cierto tipo de riesgo se modela mediante una variable aleatoria con distribución  $\exp(\lambda)$ . Asuma que hay un límite máximo de suma asegurada  $M > 0$ , de modo que en caso de que se presenta una reclamación, el monto a pagar por la aseguradora es

$$Y_M = \min\{Y, M\}.$$

Calcule  $E(Y_M)$  y  $\text{Var}(Y_M)$ . Compruebe que  $E(Y_M) \leq E(Y)$  y  $\text{Var}(Y_M) \leq \text{Var}(Y)$ .

## Capítulo 5

# Teoría de la credibilidad

La teoría de la credibilidad estudia la forma de calcular primas para cubrir un riesgo considerando el historial de reclamaciones. En este capítulo se presenta una introducción a la credibilidad completa, la credibilidad parcial y al enfoque Bayesiano.

### 5.1. Credibilidad completa

Sean  $S_1, S_2, \dots, S_m$  los montos de las reclamaciones anuales registradas de un cierto riesgo durante  $m$  periodos consecutivos. Sea  $\bar{S} = (S_1 + S_2 + \dots + S_m)/m$  el promedio de ellas. La intención es usar  $\bar{S}$  como estimador de  $E(S_{m+1})$ , siempre y cuando se tenga suficiente información para creer en tal estimador.

**Definición 1** Sean  $k \in (0, 1)$  y  $p \in (0, 1)$ . Se dice que  $\bar{S}$  tiene credibilidad completa  $(k, p)$  si

$$P( |\bar{S} - E(S)| \leq kE(S) ) \geq p. \quad (5.1)$$

Naturalmente se toman valores de  $k$  cercanos a cero y valores de  $p$  cercanos a uno. De este modo la condición anterior establece que el estimador  $\bar{S}$  tiene credibilidad completa  $(k, p)$  si dista relativamente de  $E(S)$  en menos de  $k$

con probabilidad mayor o igual a  $p$ .

## Credibilidad completa bajo hipótesis de normalidad

Encontraremos una condición sobre el número de años de observación  $m$  para obtener credibilidad completa cuando  $\bar{S}$  tiene aproximadamente distribución normal. En tal caso, la parte izquierda de (5.1) es

$$\begin{aligned} P(|\bar{S} - E(S)| \leq kE(S)) &= P\left(\frac{|\bar{S} - E(S)|}{\sqrt{\text{Var}(S)/m}} \leq \frac{kE(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)/m}}\right) \\ &\approx 2\Phi\left(\frac{k\sqrt{m}E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right) - 1. \end{aligned}$$

Como esta probabilidad debe ser mayor o igual a  $p$  se obtiene la desigualdad

$$\Phi\left(\frac{k\sqrt{m}E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right) \geq \frac{1+p}{2}.$$

Sea  $u_q$  el  $q$ -cuantil de la distribución normal, es decir  $\Phi(u_q) = q$ . Entonces

$$\frac{k\sqrt{m}E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}} = u_{(1+p)/2}.$$

De donde se obtiene

$$m = \frac{u_{(1+p)/2}^2 \cdot \text{Var}(S)}{k^2 \cdot E^2(S)}. \quad (5.2)$$

Los términos desconocidos  $E(S)$  y  $\text{Var}(S)$  pueden ahora ser estimados, por ejemplo, mediante la media y varianza muestral.

**Ejemplo.** Suponga que cada reclamación anual  $S_j$  tiene distribución Poisson compuesta, es decir,

$$S_j = \sum_{i=1}^N Y_i$$

en donde  $N$  tiene distribución Poisson( $\lambda$ ). Las variables  $Y_i$  corresponden a las reclamaciones individuales y de acuerdo a la notación previa, su primer y segundo momento son  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , entonces

$$\begin{aligned} E(S_j) &= \lambda\mu_1, \\ \text{y } \text{Var}(S_j) &= \lambda\mu_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto la fórmula (5.2) se reduce a

$$\lambda m \geq \frac{u_{(1+p)/2}^2 \cdot \mu_2}{k^2 \cdot \mu_1^2}.$$

Si adicionalmente se asume que cada reclamación  $Y_i$  tiene distribución  $\exp(\alpha)$  con  $\alpha = 1$ , entonces  $\mu_1 = 1$  y  $\mu_2 = 2$ . Tomando  $k = 0,05$  y  $p = 0,9$ , de tablas de probabilidad normal se obtiene  $u_{(1+p)/2} = u_{0,95} = 1.6449$ . Por lo tanto

$$\lambda \cdot m \geq \frac{(1,6449)^2 \cdot 2}{(0,05)^2 \cdot 1^2} = 2165.56.$$

Es decir, después de 2166 reclamaciones, se obtiene credibilidad completa con  $k = 0,05$  y  $p = 0,9$ . Estos valores particulares de  $k$  y  $p$  son usados en la práctica para ciertos tipos de riesgos.  $\circ$

La credibilidad completa sólo puede ser usada para riesgos colectivos pues, en general, se requiere de una gran número de reclamaciones para llegar a ella.

## 5.2. Credibilidad parcial

En lugar del estimador  $\bar{S}$  para  $E(S)$  se propone la combinación lineal

$$z\bar{S} + (1 - z)E(S),$$

en donde  $z \in [0, 1]$  es llamado *factor de credibilidad*. Nuevamente se pretende que tal estimador no diste demasiado de  $E(S)$ . La condición (5.1) se reduce a

$$P(|z(\bar{S} - E(S))| \leq kE(S)) \geq p.$$

O bien,

$$P(|\bar{S} - E(S)| \leq \frac{k}{z}E(S)) \geq p.$$

Esta es la misma condición para la credibilidad completa solo que en lugar de  $k$  tenemos ahora  $k/z$ . Entonces nuevamente bajo la hipótesis de normalidad se tiene la condición

$$m = \frac{z^2 \cdot u_{(1+p)/2}^2 \cdot \text{Var}(S)}{k^2 \cdot E^2(S)}.$$

De donde se obtiene

$$z = \frac{k \cdot E(S)\sqrt{m}}{u_{(1+p)/2} \cdot \sqrt{\text{Var}(S)}}.$$

Por lo tanto se define

$$z = \min \left\{ \frac{k \cdot E(S)\sqrt{m}}{u_{(1+p)/2} \cdot \sqrt{\text{Var}(S)}}, 1 \right\}. \quad (5.3)$$

### 5.3. Credibilidad Bayesiana

Sean  $S_1, \dots, S_m$  variables aleatorias que representan las reclamaciones anuales de un cierto riesgo durante  $m$  años consecutivos. En esta sección se presenta el enfoque Bayesiano para determinar la prima  $p$  para cubrir las reclamaciones del siguiente año  $S_{m+1}$ .

Suponga que la distribución de la reclamación anual  $S_j$  depende de un parámetro desconocido  $\Theta$ . Bajo el enfoque Bayesiano se considera que tal parámetro es una variable aleatoria para la cual se asume una distribución de probabilidad a priori, tal distribución deber ser tal que su media es  $\Theta$ , es decir,  $E(S_j) = \Theta$ . Los dos casos que consideraremos son: la distribución Poisson con parámetro  $\lambda$ , y la distribución normal considerando a su media como  $\Theta$ .

El objetivo es entonces estimar el valor de  $\Theta$  con base en el historial de reclamaciones  $S_1, \dots, S_m$ . Tal estimación será la prima  $p$  para cubrir las reclamaciones del siguiente año. El mejor estimador para esta prima es la media de la distribución a posteriori, es decir,  $p = E(\Theta | S_1, \dots, S_m)$ , a la cual llamaremos *prima por credibilidad*. A continuación se detallan los dos modelos mencionados antes y que son de uso común en la práctica.

#### Modelo Poisson-gama

Este modelo adquiere su nombre a partir de las siguientes hipótesis: El total de reclamaciones  $S_j$  tiene distribución Poisson con parámetro  $\lambda$ , el cual se considera aleatorio con distribución a priori gama( $\gamma, \alpha$ ). Observe que hemos supuesto que las reclamaciones anuales  $S_j$  toman valores enteros. Para enfatizar tal supuesto estas reclamaciones se escriben simplemente como  $N_j$ .

La función de densidad a posteriori de  $\lambda$  es, para  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned}
 f(x | N_1, \dots, N_m) &= \frac{f(N_1, \dots, N_m | \lambda = x)f(x)}{\int_0^\infty f(N_1, \dots, N_m | \lambda = x)f(x) dx} \\
 &= \frac{\prod_{j=1}^m \left(\frac{x^{N_j}}{N_j!} e^{-x}\right) \cdot \frac{\alpha^\gamma}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} e^{-\alpha x}}{\int_0^\infty \prod_{j=1}^m \left(\frac{x^{N_j}}{N_j!} e^{-x}\right) \cdot \frac{\alpha^\gamma}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} e^{-\alpha x} dx} \\
 &= \frac{x^{m\bar{N}+\gamma-1} e^{-(m+\alpha)x}}{\int_0^\infty x^{m\bar{N}+\gamma-1} e^{-(m+\alpha)x} dx} \\
 &= \frac{(m+\alpha)^{m\bar{N}+\gamma}}{\Gamma(m\bar{N}+\gamma)} \cdot x^{m\bar{N}+\gamma-1} e^{-(m+\alpha)x}.
 \end{aligned}$$

Es decir, la densidad a posteriori es  $\text{gama}(m\bar{N} + \gamma, m + \alpha)$ . Por lo tanto la prima por credibilidad  $p$ , media de tal densidad, es

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{m\bar{N} + \gamma}{m + \alpha} \\
 &= \frac{m}{m + \alpha} \bar{N} + \frac{\alpha}{m + \alpha} \frac{\gamma}{\alpha} \\
 &= z\bar{N} + (1 - z) \frac{\gamma}{\alpha},
 \end{aligned}$$

en donde  $z = m/(m + \alpha)$  es llamado *factor de credibilidad*. Observe que esta cantidad crece monótonamente a uno cuando  $m$  crece. Los parámetros  $\gamma$  y  $\alpha$  puede ser estimados mediante algún método estadístico.

## Modelo normal-normal

En este modelo se postula que las reclamaciones  $S_j$  tienen distribución  $N(\Theta, \sigma^2)$  en donde la media  $\Theta$  es aleatoria con distribución  $N(\mu, \eta^2)$ . La primera hipótesis puede ser justificada en el caso cuando  $S_j$  se compone de un gran número de reclamaciones individuales, para ello no es necesario suponer que las reclamaciones individuales tienen la misma distribución.

Para la segunda hipótesis se buscan parámetros  $\mu$  y  $\eta^2$  de tal forma que la probabilidad asignada a la parte negativa del eje sea mínima.

La función de densidad a posteriori de  $\Theta$  es

$$\begin{aligned} f(\theta | S_1, \dots, S_m) &= \frac{f(S_1, \dots, S_m | \Theta = \theta) f(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(S_1, \dots, S_m | \Theta = \theta) f(\theta) d\theta} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(y_j - \theta)^2 / 2\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2}} e^{-(\theta - \mu)^2 / 2\eta^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(y_j - \theta)^2 / 2\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2}} e^{-(\theta - \mu)^2 / 2\eta^2} d\theta}, \end{aligned}$$

en donde el exponente, omitiendo el signo negativo, es

$$\begin{aligned} \frac{(\theta - \mu)^2}{2\eta^2} + \sum_{j=1}^m \frac{(y_j - \theta)^2}{2\sigma^2} &= \theta^2 \left( \frac{1}{2\eta^2} + \frac{m}{2\sigma^2} \right) - 2\theta \left( \frac{\mu}{2\eta^2} + \frac{m\bar{y}}{2\sigma^2} \right) \\ &\quad + \frac{\mu^2}{2\eta^2} + \sum_{j=1}^m \frac{y_j^2}{2\sigma^2} \\ &= \frac{[\theta - (\frac{\mu}{\eta^2} + \frac{m\bar{y}}{\sigma^2})(\frac{1}{\eta^2} + \frac{m}{\sigma^2})^{-1}]^2}{2(\frac{1}{\eta^2} + \frac{m}{\sigma^2})^{-1}} + c, \end{aligned}$$

Observe que el sumando  $c$  no depende de  $\theta$ . De esta forma y después de hacer los cálculos complementarios puede comprobarse que la función de densidad a posteriori de  $\Theta$  es nuevamente normal. La media de esta distribución es entonces la prima por credibilidad, es decir,

$$\begin{aligned} p &= \left( \frac{\mu}{\eta^2} + \frac{m\bar{y}}{\sigma^2} \right) \left( \frac{1}{\eta^2} + \frac{m}{\sigma^2} \right)^{-1} \\ &= \frac{\mu\sigma^2 + m\eta^2\bar{S}}{\sigma^2 + m\eta^2} \\ &= \frac{m\eta^2}{\sigma^2 + m\eta^2} \bar{S} + \left( 1 - \frac{m\eta^2}{\sigma^2 + m\eta^2} \right) \mu \\ &= z\bar{S} + (1 - z)\mu, \end{aligned}$$

en donde  $z = m\eta^2 / (\sigma^2 + m\eta^2)$  es el *factor de credibilidad*, el cual tiene comportamiento monótono creciente respecto a  $m$ . El parámetro  $\mu$  se estima usando alguna técnica estadística.

## Capítulo 6

# Procesos estocásticos

En este capítulo se presenta una introducción al tema de los procesos estocásticos. Se explican algunos conceptos y propiedades generales, y se dan algunos ejemplos de procesos estocásticos particulares. Este material será usado en la última parte del curso. Supondremos como elemento base un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

**Definición 2 (Proceso estocástico)** *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias  $\{X_t : t \in T\}$ , parametrizada por un conjunto  $T$ , llamado espacio parametral.*

El conjunto  $T$  usualmente se interpreta como un conjunto de tiempos. Se dice que el proceso es *a tiempo discreto* en caso de que el conjunto de parámetros sea un conjunto discreto, por ejemplo  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ . En este caso el proceso consiste de una sucesión infinita de variables aleatorias. Se dice en cambio que el proceso es *a tiempo continuo* cuando el conjunto de parámetros consiste de un subintervalo de  $\mathbb{R}$ , por ejemplo  $T = [0, \infty)$ . En general consideraremos procesos estocásticos con este espacio parametral. Un proceso estocástico es entonces una función de dos variables

$$X : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que para cada  $t \in T$ , la función  $\omega \mapsto X_t(\omega)$  es una variable aleatoria,

mientras que para cada  $\omega$  en  $\Omega$ , la función  $t \mapsto X_t(\omega)$  es una *trayectoria* del proceso. Con este modelo se pretende representar la evolución aleatoria de un sistema a lo largo del tiempo.

## 6.1. Filtraciones y tiempos de paro

**Definición 3 (Filtración)** Una familia de  $\sigma$ -álgebras  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es una *filtración* si para  $0 \leq s \leq t$ , se cumple  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ . Al espacio  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$  se le llama *espacio de probabilidad filtrado*.

Cuando  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible para cada  $t \geq 0$  entonces se dice que el proceso es *adaptado* a la filtración. Todo proceso estocástico  $X_t$  determina una *filtración natural* dada por  $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$ . Claramente todo proceso es adaptado a su filtración natural. En este caso a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$  se le interpreta como la “historia” del proceso al tiempo  $t$ , pues en ella se encuentran todos los posibles eventos o sucesos que el proceso haya tenido hasta ese momento. Adicionalmente se dice que una filtración es *continua por la derecha* cuando  $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$  coincide con  $\mathcal{F}_t$ .

Un *tiempo de paro* es una función  $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  tal que  $(\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t$  para cada  $t \geq 0$ .

Es de utilidad también conocer alguna noción de igualdad entre procesos estocásticos. Se dice que dos procesos  $X_t$  y  $Y_t$  son *equivalentes*, o también que uno es una *versión* (o *modificación*) del otro, si para cada  $t \geq 0$  se cumple  $P(X_t = Y_t) = 1$ . Un tipo de igualdad más fuerte establece que los procesos son *indistinguibles* si

$$P(X_t = Y_t \text{ para cada } t \geq 0) = 1.$$

Esto significa que con probabilidad uno las trayectorias de los dos procesos son idénticas. Claramente la indistinguibilidad es más fuerte que la equivalencia. Sin embargo, cuando los procesos son continuos, es decir, cuando sus trayectorias son funciones continuas del parámetro, ambas nociones de igualdad coinciden.

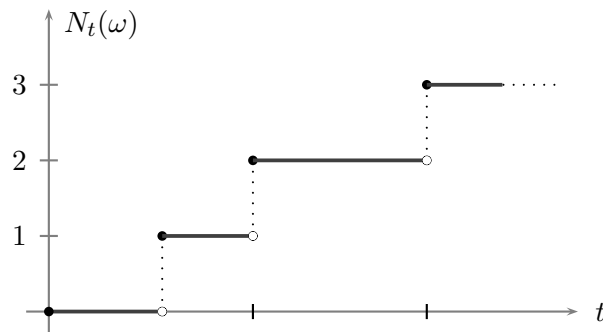
## 6.2. Proceso de Poisson

En esta sección se estudian algunos aspectos elementales de uno de los procesos estocásticos de mayor importancia: el proceso de Poisson.

**Definición 4** *Un proceso estocástico de tiempo continuo  $\{N(t) : t \geq 0\}$ , y con espacio de estados el conjunto discreto  $\{0, 1, \dots\}$ , es un proceso de Poisson de parámetro o intensidad  $\lambda > 0$ , si cumple las siguientes propiedades:*

- a)  $N(0) = 0$ .
- b) *Tiene incrementos independientes y estacionarios.*
- c)  $P(N(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$ , cuando  $h \rightarrow 0$ .
- d)  $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$ , cuando  $h \rightarrow 0$ .

Existen varias definiciones equivalentes de este proceso, la ventaja de esta definición es que las dos últimas propiedades pueden interpretarse intuitivamente del siguiente modo. El proceso empieza en el estado 0 y en el siguiente periodo infinitesimal de tiempo de longitud  $h$ , el proceso salta al siguiente estado 1 con probabilidad  $\lambda h$ , o permanece en el estado actual 0 con probabilidad complementaria  $1 - \lambda h$ . Debido a la hipótesis de estacionariedad, este tipo de comportamiento se presenta en cualquier momento. Una posible trayectoria de un proceso de Poisson se muestra en la siguiente figura.



Una trayectoria del proceso de Poisson.

El proceso de Poisson se utiliza para modelar situaciones de conteo de ocurrencias de un evento particular en un intervalo de tiempo dado. Por ejemplo,  $N(t)$  puede representar el número de llamadas telefónicas recibidas en un conmutador, el número de accidentes ocurridos en un cierto lugar, o el número de clientes que buscan un servicio durante el intervalo de tiempo  $[0, t]$ . En nuestro caso, usaremos este proceso para modelar el número de reclamaciones que llegan a una compañía aseguradora. Este proceso adquiere su nombre a partir del siguiente resultado que puede ser demostrado a partir de los postulados enunciados.

**Proposición 16** *La variable  $N(t)$  tiene distribución Poisson( $\lambda t$ ), es decir, para cualquier  $t > 0$  y  $n = 0, 1, \dots$*

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

En particular  $E(N(t)) = \lambda t$  y  $\text{Var}(N(t)) = \lambda t$ . Uno de los objetos de estudio acerca de este proceso es la variable  $T_k$  definida como el tiempo que transcurre entre el evento  $k - 1$  y el evento  $k$ . Sobre este conjunto de variables aleatorias se conoce el siguiente resultado interesante:

**Proposición 17** *Los tiempos  $T_1, T_2, \dots$  son variables aleatorias independientes, y cada una de ellas tiene distribución  $\exp(\lambda)$ .*

Otras propiedades de este proceso pueden ser encontradas en la sección de ejercicios.

### 6.3. Martingalas

Las martingalas son tipos de procesos estocásticos que aparecen con frecuencia tanto en la teoría general de procesos como en las aplicaciones. Existe una extensa teoría matemática desarrollada de estos procesos.

**Definición 5** *Un proceso  $\{M_t : t \geq 0\}$  que es adaptado e integrable es una martingala si para  $0 \leq s \leq t$  se cumple*

$$E(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s \quad c.s. \quad (6.1)$$

Las martingalas son procesos que estan relacionados con los juegos justos. Si  $M_t$  representa la fortuna de un jugador que apuesta continuamente entonces la igualdad anterior se interpreta del siguiente modo. En promedio la fortuna del jugador al tiempo  $t$  dada toda la historia del juego hasta el tiempo  $s \leq t$  es la fortuna del jugador al tiempo  $s$ , es decir, el juego es justo pues el jugador en promedio no pierde ni gana. Cuando en lugar de (6.1) se cumple  $E(M_t | \mathcal{F}_s) \leq M_s$  se dice que el proceso es una *supermartingala*, se trata entonces de un juego desfavorable al jugador pues en promedio su fortuna disminuye. En caso de la desigualdad contraria el proceso es una *submartingala*, juego favorable al jugador.

Cuando se toma esperanza en la ecuación (6.1) se obtiene  $E(M_t) = E(M_s)$ . Esto quiere decir que todas las variables aleatorias que conforman una martingala tienen la misma esperanza. En particular, si la variable inicial  $M_0$  es cero o su esperanza es cero, entonces  $E(M_t) = 0$  para cualquier  $t \geq 0$ . Algunos ejemplos sencillos de martingalas aparecen en la sección de ejercicios.

Finalmente se enuncia un resultado de la teoría general de martingalas que será usado en la última parte del curso.

**Proposición 18 (Teorema de paro de martingalas)** *Sea  $\{M_t : t \geq 0\}$  una martingala y sea  $\tau$  un tiempo de paro. Entonces  $\{M_{t \wedge \tau} : t \geq 0\}$  es también una martingala, es decir, para  $0 \leq s \leq t$ ,*

$$E(M_{t \wedge \tau} | \mathcal{F}_s) = M_{s \wedge \tau} \quad c.s.$$

## 6.4. Ejercicios

### Proceso de Poisson

37. Sea  $\{N_t : t \geq 0\}$  un proceso de Poisson con parámetro  $\lambda$ . Demuestre que para  $0 \leq s \leq t$ ,

$$N_t - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda(t - s)).$$

38. Demuestre que la suma de dos procesos de Poisson independientes es nuevamente un proceso de Poisson con parámetro la suma de los parámetros.
39. Sea  $\{N_t : t \geq 0\}$  un proceso de Poisson con parámetro  $\lambda > 0$  y  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  una sucesión de v.a.i.i.d. tal que  $X_n \sim \text{Ber}(p)$ . Demuestre que

$$\left\{ \sum_{k=1}^{N_t} X_k : t \geq 0 \right\}$$

es un proceso de Poisson con parámetro  $\lambda p$ .

40. Sea  $\{N_t : t \geq 0\}$  un proceso de Poisson con parámetro  $\lambda$  y sea  $a > 0$  una constante. Demuestre que  $\{N_{at} : t \geq 0\}$  es un proceso de Poisson con parámetro  $\lambda a$ .

### Martingalas

41. Demuestre que  $\{M_t : t \geq 0\}$  es una submartingala si y sólo si  $\{-M_t : t \geq 0\}$  es una supermartingala.
42. Demuestre que un proceso es una martingala si y sólo si es al mismo tiempo una submartingala y una supermartingala.

## Capítulo 7

# Teoría de la ruina

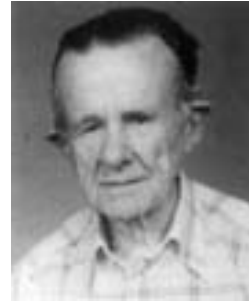
Este capítulo contiene una introducción breve al modelo clásico de Cramér-Lundberg, y a algunos conceptos elementales sobre la probabilidad de ruina en tal modelo. Se estudia únicamente el caso sencillo cuando la cola de la distribución de las reclamaciones es exponencial.

### 7.1. Modelo clásico de Cramér-Lundberg

El modelo de Cramér-Lundberg tiene sus orígenes en la tesis doctoral de Filip Lundberg terminada en el año de 1903. En este trabajo Lundberg estudia el reaseguro de riesgos colectivos y presenta el proceso de Poisson compuesto. Este trabajo utiliza términos un tanto distintos a los actuales pues en aquellos años aún no se había desarrollado la teoría de los procesos estocásticos, y parece ser que era difícil entenderlos. En 1930 Harald Cramér retoma y desarrolla las ideas originales de Lundberg, y las pone en el contexto de los procesos estocásticos de reciente creación. El modelo ha sido estudiado en extenso y varias formas de generalizarlo se han propuesto y estudiado.



Ernest Filip Oskar Lundberg  
(Suecia, 1876–1965)

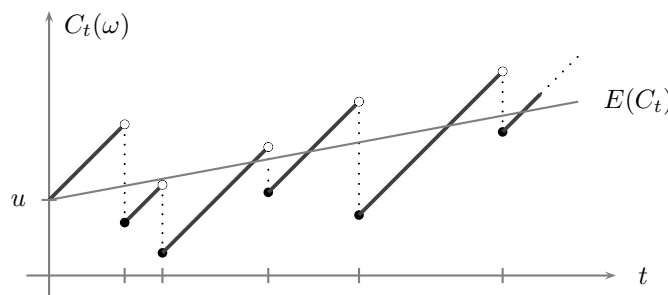


Carl Harald Cramér  
(Suecia, 1893–1985)

El modelo clásico de Cramér-Lundberg es el proceso a tiempo continuo  $\{C_t : t \geq 0\}$  dado por la siguiente expresión:

$$C_t = u + ct - \sum_{j=1}^{N_t} Y_j, \quad (7.1)$$

en donde  $u$  es el capital inicial de la compañía aseguradora,  $ct$  es la entrada por primas hasta el tiempo  $t$  con  $c$  una constante positiva,  $Y_j$  es el monto de la  $j$ -ésima reclamación y  $N_t$  es un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$ . La variable  $C_t$  representa el balance más sencillo de ingresos menos egresos de la compañía aseguradora. Al proceso  $C_t$  se le llama *proceso de riesgo*<sup>1</sup>, o *proceso de superávit*<sup>2</sup>, y tiene trayectorias como se muestra en la siguiente figura:



Una trayectoria del proceso de riesgo.

<sup>1</sup>Risk process.

<sup>2</sup>Surplus process.

Estas trayectorias comienzan siempre en  $u$ , que es el capital inicial. Los intervalos en donde ellas son continuas y crecientes corresponden a periodos en donde no hay reclamaciones. El crecimiento es de la forma  $ct$ . Las discontinuidades son siempre saltos hacia abajo, y aparecen en el momento en que se efectúa una reclamación, la cual se supone que se paga de manera inmediata. Esto está determinado por el proceso Poisson. El tamaño de un salto es el tamaño de la reclamación dada por la variable  $Y$ .

Nuevamente supondremos que los montos  $Y_1, Y_2, \dots$  son variables aleatorias independientes no negativas e idénticamente distribuidas con función de distribución  $G$ , y función generadora de momentos  $M_Y(r)$ . Los momentos son  $\mu_n = E(Y^n)$  y en particular  $\mu$  denota el primer momento  $\mu_1$ . No es difícil comprobar que

$$\begin{aligned} E(C_t) &= u + (c - \lambda\mu)t, \\ \text{y } \text{Var}(C_t) &= \lambda\mu_2t. \end{aligned}$$

De modo que la trayectoria promedio de  $C_t$  es la línea recta que inicia en  $u > 0$  y tiene pendiente positiva  $c - \lambda\mu$ . La variable aleatoria  $C_t$  se puede interpretar como el capital de la compañía aseguradora al tiempo  $t$  y por razones naturales y legales es importante que  $C_t$  permanezca por arriba de cierto nivel mínimo. Ajustando el capital inicial  $u$  se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que este nivel mínimo es cero. Cuando  $C_t < 0$  se dice que hay *ruina*. La ruina casi nunca sucede en la práctica, es solamente un término técnico que produce alguna toma de decisión. Por ejemplo si el capital de una compañía aseguradora asignado a una cartera decrece en forma significativa automáticamente la aseguradora puede tomar ciertas medidas para subsanar esta situación y no se trata de un evento insalvable. Por otro lado es natural suponer que la compañía aseguradora posee varios portafolios de modo que ruina en uno de ellos no significa necesariamente bancarrota.

## 7.2. Probabilidad de ruina

Nuestros objetos de interés son:

- a) El *tiempo de ruina* dado por:

$$\tau = \inf\{t > 0 : C_t < 0\}, \quad (7.2)$$

en donde se define  $\inf \emptyset = \infty$ .

- b) La *probabilidad de ruina* en el intervalo  $[0, t]$  o también llamada *probabilidad de ruina con horizonte finito*, definida como sigue:

$$\begin{aligned}\psi(u, t) &= P(\tau \leq t \mid C_0 = u) \\ &= P(\inf_{0 < s \leq t} C_t < 0).\end{aligned}$$

- c) La probabilidad de ruina o probabilidad de ruina con horizonte infinito dada por:

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(u, t) \\ &= P(\inf_{t > 0} C_t < 0).\end{aligned}$$

**Proposición 19** Sea  $Q(u) = 1 - \psi(u)$ . Entonces

$$1. Q'(u) = \frac{\lambda}{c} [Q(u) - \int_0^u Q(u-y) dF_Y(y)].$$

$$2. \psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}.$$

$$3. \psi(u) = \frac{\lambda}{c} \left[ \int_u^\infty (1 - F(x)) dx + \int_0^u \psi(u-x)(1 - F(x)) dx \right].$$

*Demostración.* Usaremos análisis del primer paso condicionando sobre el momento y monto de la primera reclamación.

$$\begin{aligned}Q(u) &= P(\text{“No ruina en } [0, \infty)\text{”} \mid C_0 = u) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty P(\text{“No ruina en } [0, \infty)\text{”} \mid T_1 = t, Y_1 = y) dF_Y(y) f_{T_1}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^{u+ct} P(\text{“No ruina en } [0, \infty)\text{”} \mid T_1 = t, Y_1 = y) dF_Y(y) f_{T_1}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} P(\text{“No ruina en } (t, \infty)\text{”} \mid T_1 = t, Y_1 = y) dF_Y(y) dt \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} Q(u+ct-y) dF_Y(y) dt.\end{aligned}$$

Sea  $s(t) = u + ct$ . Entonces

$$Q(u) = \frac{1}{c} \int_u^\infty \lambda e^{-\lambda(s-u)/c} \int_0^s Q(s-y) dF_Y(y) ds.$$

Derivando esta expresión se encuentra el resultado del primer inciso. Integrando esta ecuación diferencial entre 0 y  $u$  se obtiene

$$\begin{aligned} Q(u) - Q(0) &= \frac{\lambda}{c} \left[ \int_0^u Q(x) dx - \int_0^u \int_0^x Q(x-y) dF_Y(y) dx \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \left[ \int_0^u Q(x) dx - \int_0^u \int_y^u Q(x-y) dx dF_Y(y) \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \left[ \int_0^u Q(x) dx - \int_0^u \int_0^{u-y} Q(x) dx dF_Y(y) \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \left[ \int_0^u Q(x) dx - \int_0^u \int_0^{u-x} Q(x) dF_Y(y) dx \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^u Q(x)(1 - F(u-x)) dx \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^u Q(u-x)(1 - F(x)) dx \tag{7.3} \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty Q(u-x)(1 - F(x)) \cdot 1_{[0,u]}(x) dx. \end{aligned}$$

El siguiente paso es hacer  $u$  tender a infinito. En tal caso,  $Q(u)$  tiende a uno. Además el integrando que aparece en el lado derecho es una función monótona creciente en  $u$ , y cuyo límite es la función integrable  $(1 - F(x))$ . Entonces por el teorema de convergencia monótona se obtiene

$$\begin{aligned} 1 - Q(0) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty (1 - F(x)) dx \\ &= \frac{\lambda\mu}{c}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\psi(0) = 1 - Q(0) = \frac{\lambda\mu}{c}. \tag{7.4}$$

De esta forma se obtiene el segundo resultado. Finalmente de (7.3) y (7.4) se sigue que

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{\lambda}{c} \left[ \mu - \int_0^u (1 - \psi(u-x))(1 - F(x)) dx \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \left[ \int_u^\infty (1 - F(x)) dx + \int_0^u \psi(u-x)(1 - F(x)) dx \right]. \end{aligned}$$

□

## La condición de ganancia neta

Sean  $T_0, T_1, T_2, \dots$  los tiempos de paro en donde se efectúan los siniestros. Supondremos  $T_0 = 0$ . Para cada entero  $k \geq 1$  defina la variable aleatoria

$$X_k = c(T_k - T_{k-1}) - Y_k,$$

que pueden ser interpretadas como el balance de la compañía aseguradora entre dos siniestros sucesivos. La esperanza de esta variable es

$$E(X_k) = cE(T_k - T_{k-1}) - E(Y_k) = c(1/\lambda) - \mu.$$

Se puede demostrar que la ruina ocurre casi seguramente si y sólo si  $E(X_k) \leq 0$ . Como deseamos que esta situación no ocurra supondremos que  $E(X_k) > 0$ , es decir,

$$c > \lambda\mu \tag{7.5}$$

Esta es la *condición de ganancia neta*<sup>3</sup> que ya habíamos mencionado antes y se interpreta de la siguiente forma: en promedio, la entrada por primas por unidad de tiempo,  $c$ , es mayor que el total de reclamaciones por unidad de tiempo,  $\lambda\mu$ .

### 7.3. El coeficiente de ajuste

El coeficiente de ajuste es un número real que aparece en el problema de calcular o estimar probabilidades de ruina. Una manera de definirlo es la siguiente:

Defina la función  $\theta(r) = \lambda(M_Y(r) - 1) - cr$ , en donde  $M_Y(r)$  es la función generadora de  $Y$ . Naturalmente esta función está bien definida para valores

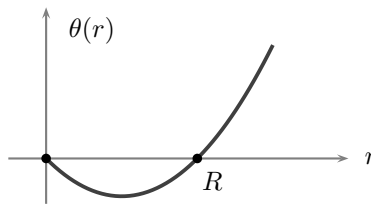
---

<sup>3</sup>net profit condition.

de  $r$  tales que  $M_Y(r) < \infty$ . Entonces, suponiendo diferenciabilidad, se tiene que

$$\begin{aligned}\theta'(r) &= \lambda M_Y'(r) - c, \\ \text{y } \theta''(r) &= \lambda M_Y''(r) = \lambda E(Y^2 e^{rY}) > 0.\end{aligned}$$

Por lo anterior,  $\theta(r)$  es una función estrictamente convexa. Además  $\theta(0) = 0$ , y  $\theta'(0) = \lambda\mu - c < 0$  por la condición de ganancia neta (7.5). Entonces es posible que exista un valor  $R > 0$  tal que  $\theta(R) = 0$ . Una gráfica aproximada de  $\theta(r)$ , presentando esta situación, se muestra a continuación.



Possible comportamiento de la función  $\theta(r)$ .

Más adelante veremos algunas consecuencias de la posible existencia de tal valor  $R$ , mientras tanto tenemos la siguiente definición.

**Definición 6 (Coeficiente de ajuste)** *Al posible valor  $R$  tal que*

$$\lambda(M_Y(R) - 1) = cR,$$

*se le llama coeficiente de ajuste, o exponente de Lundberg.*

**Ejemplo.** Suponga que las reclamaciones siguen una distribución  $\exp(\alpha)$ . Demostraremos que el coeficiente de ajuste es  $R = \alpha - \lambda/c$ . Tenemos que

$$\begin{aligned}\theta(r) &= \lambda(M_Y(r) - 1) - cr \\ &= \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1\right) - cr \\ &= \lambda\left(\frac{r}{\alpha - r}\right) - cr\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\alpha - r} - c\right)r.$$

De modo que  $\theta(r) = 0$  cuando  $r = 0$  ó  $\lambda/(\alpha - r) - c = 0$ . Despejando  $r$  de la segunda condición y escribiendo ahora  $R$  se obtiene  $R = \alpha - \lambda/c$ .  $\circ$

Para el caso de reclamaciones exponenciales, sin embargo, el cálculo es sencillo.

**Ejemplo.** Suponga que las reclamaciones siguen una distribución  $\exp(\alpha)$ . Demostraremos que el coeficiente de ajuste es  $R = \alpha - \lambda/c$ , y por lo tanto

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-Ru}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \theta(r) &= \lambda(M_Y(r) - 1) - cr \\ &= \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1\right) - cr \\ &= \lambda\left(\frac{r}{\alpha - r}\right) - cr \\ &= \left(\frac{\lambda}{\alpha - r} - c\right)r. \end{aligned}$$

De modo que  $\theta(r) = 0$  cuando  $r = 0$  ó  $\lambda/(\alpha - r) - c = 0$ . Despejando  $r$  de la segunda condición y escribiendo ahora  $R$  se obtiene  $R = \alpha - \lambda/c$ . Además por lo demostrado antes

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \lambda/c)u} \\ &= \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-Ru}. \end{aligned}$$

$\circ$

Tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 20** *El proceso  $\{e^{-rC_t - \theta(r)t} : t \geq 0\}$  es una martingala.*

*Demostración.* La adaptabilidad del proceso es evidente pues implícitamente estamos usando la filtración natural. Acerca de la integrabilidad tenemos los

siguientes cálculos

$$\begin{aligned}
E(e^{-rC_t - \theta(r)t}) &= e^{-\theta(r)t} E(e^{-r(u+ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i)}) \\
&= e^{-\theta(r)t - r(u+ct)} E(e^{r \sum_{i=1}^{N_t} Y_i}) \\
&= e^{-\theta(r)t - r(u+ct)} M_{S_t}(r) \\
&= e^{-\theta(r)t - r(u+ct)} e^{\lambda t (M_Y(r) - 1)} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Finalmente tenemos la propiedad de martingala. Para  $0 \leq s < t$ ,

$$\begin{aligned}
E(e^{-rC_t - \theta(r)t} | \mathcal{F}_s) &= e^{-\theta(r)t} E(e^{-rC_t} | \mathcal{F}_s) \\
&= e^{-\theta(r)t} E(e^{-r(C_t - C_s) - rC_s} | \mathcal{F}_s) \\
&= e^{-\theta(r)t - rC_s} E(e^{-r(C_t - C_s)}) \\
&= e^{-\theta(r)t - rC_s} E(e^{-r(c(t-s) - \sum_{i=N_s+1}^{N_t} Y_i)}) \\
&= e^{-\theta(r)t - rC_s - rc(t-s)} E(e^{r \sum_{i=1}^{N_t-s} Y_i}) \\
&= e^{-\theta(r)t - rC_s - rc(t-s)} e^{\lambda(t-s)(M_Y(r) - 1)} \\
&= e^{-rC_s - \theta(r)s}.
\end{aligned}$$

□

**Teorema 2 (Desigualdad de Lundberg)** *Si el coeficiente de ajuste  $R$  existe, entonces*

$$\psi(u) < e^{-Ru}.$$

*Demostración.* Sea  $\tau$  el tiempo de paro correspondiente al primer tiempo de ruina. Entonces el proceso  $\{C_{t \wedge \tau} : t \geq 0\}$  es también una martingala y por lo tanto

$$\begin{aligned}
e^{-Ru} &= e^{-RC_0} \\
&= E(e^{-RC_{t \wedge \tau}}) \\
&= E(e^{-RC_{t \wedge \tau}} | \tau > t) + E(e^{-RC_{t \wedge \tau}} | \tau \leq t) \\
&\geq E(e^{-RC_{t \wedge \tau}} | \tau \leq t) \\
&= E(e^{-RC_\tau} | \tau \leq t).
\end{aligned}$$

Haciendo  $t \rightarrow \infty$ , por el teorema de convergencia monótona se obtiene

$$\begin{aligned}
 e^{-Ru} &\geq E(e^{-RC\tau} | \tau < \infty) \\
 &> E(1 | \tau < \infty) \\
 &= P(\tau < \infty) \\
 &= \psi(u).
 \end{aligned}$$

□

**Proposición 21 (Cotas para el coeficiente de ajuste)** *Si el coeficiente de ajuste  $R$  existe, entonces cumple las siguientes desigualdades:*

$$\frac{1}{M} \ln\left(\frac{c}{\lambda\mu}\right) < R < \frac{2(c - \lambda\mu)}{\lambda\mu_2},$$

en donde la primera desigualdad es válida bajo la hipótesis adicional de que  $Y \leq M$  c.s., para alguna constante  $M > 0$ .

*Demostración.*

1. Considere nuevamente la función  $\theta(r) = \lambda(M_Y(r) - 1) - cr$  para  $r > 0$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 \theta''(r) &= \lambda E(Y^2 e^{rY}) \\
 &> \lambda E(Y^2) \\
 &= \lambda\mu_2.
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \theta'(r) &= \theta'(0) + \int_0^r \theta''(s) ds \\
 &> (\lambda\mu - c) + \lambda\mu_2 r.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \theta(r) &= \theta(0) + \int_0^r \theta'(s) ds \\
 &> (\lambda\mu - c)r + \lambda\mu_2 \frac{1}{2} r^2.
 \end{aligned}$$

Evaluando la última desigualdad en  $R$  se obtiene

$$0 > (\lambda\mu - c)R + \lambda\mu_2 \frac{1}{2}R^2 = [(\lambda\mu - c) + \lambda\mu_2 \frac{1}{2}R]R.$$

Como  $R > 0$  entonces  $(\lambda\mu - c) + \lambda\mu_2 \frac{1}{2}R < 0$ . Despejando  $R$  se obtiene la cota inferior anunciada.

2. Suponga ahora que  $Y_i \leq M$  c.s. y sea  $h(x) = \frac{x}{M}(e^{RM} - 1) - (e^{Rx} - 1)$ . Entonces  $h''(x) = -R^2 e^{Rx} < 0$ . Por lo tanto  $h$  es cóncava con  $h(0) = h(M) = 0$ . Esto quiere decir que  $h(x) > 0$  para  $0 < x < M$ , es decir,

$$\frac{x}{M}(e^{RM} - 1) - (e^{Rx} - 1) > 0,$$

o bien

$$(e^{Rx} - 1) \leq \frac{x}{M}(e^{RM} - 1). \quad (7.6)$$

Sea  $g(x) = xe^x - e^x + 1$ . Entonces  $g'(x) = xe^x > 0$ . Por lo tanto  $g(x)$  es creciente para  $x > 0$ , es decir,  $g(x) > g(0) = 0$  para  $x > 0$ . Es decir,  $xe^x - e^x + 1 > 0$  para  $x > 0$ . En particular, evaluando en  $x = RM$  se obtiene  $RM e^{RM} - e^{RM} + 1 > 0$ . Por lo tanto

$$\frac{e^{RM} - 1}{RM} < e^{RM}. \quad (7.7)$$

Por otro lado, usando (7.6),

$$\begin{aligned} M_Y(R) - 1 &= \int_0^M (e^{Rx} - 1) dG(x) \\ &\leq \int_0^M \frac{x}{M} \cdot (e^{RM} - 1) dG(x) \\ &= \frac{1}{M}(e^{RM} - 1) \int_0^M x dG(x) \\ &= \frac{\mu}{M}(e^{RM} - 1). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Por lo tanto usando (7.8) y luego (7.7),

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(M_Y(R) - 1) - cR \\ &\leq \frac{\lambda\mu}{M}(e^{RM} - 1) - cR \\ &< \lambda\mu R e^{RM} - cR \\ &= (\lambda\mu e^{RM} - c)R. \end{aligned}$$

por lo tanto  $(\lambda\mu e^{RM} - c) > 0$ . Despejando  $R$  se obtiene la desigualdad buscada.

□

## 7.4. Ejercicios

### Modelo de Cramér-Lundberg

43. Considere el proceso de Cramér-Lundberg con la notación e hipótesis usuales. Demuestre que

a)  $E(C_t) = u + (c - \lambda\mu)t$ .

b)  $\text{Var}(C_t) = \lambda\mu_2t$ .

c)  $M_{C_t}(r) = -$ .

### Probabilidades de ruina

44. *Solución explícita al problema de encontrar la probabilidad de ruina cuando las reclamaciones son exponenciales.* Considere el modelo de Cramér-Lundberg en donde las reclamaciones  $Y$  tienen distribución  $\exp(\alpha)$ .

a) Demuestre que

$$Q'(u) = \frac{\lambda}{c} [Q(u) - e^{-\alpha u} \int_0^u Q(y) \alpha e^{\alpha y} dy].$$

b) Derive la expresión anterior para demostrar que

$$Q''(u) = \left(\frac{\lambda}{c} - \alpha\right) Q'(u).$$

c) Compruebe que  $Q(u) = a + be^{-(\alpha-\lambda/c)u}$  es solución de la ecuación diferencial anterior, en donde  $a$  y  $b$  son constantes.

d) Use las condiciones  $\Psi(0) = \lambda\mu/c$  y  $\Psi(\infty) = 0$  para encontrar los valores de las constantes  $a$  y  $b$ , y concluir que

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha-\lambda/c)u}.$$

e) Suponga  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = 1/2$  y  $c = 2$ . Observe que  $c > \lambda\mu$ . ¿Cuál debe ser el capital inicial  $u$  para que la probabilidad de ruina sea menor o igual a 0.01?

## Apéndice A

# Distribuciones de probabilidad

En este apéndice se presentan en orden alfabético algunas distribuciones de probabilidad utilizadas en el texto. La función generadora de probabilidad se denota por  $G(t)$ , y la función generadora de los momentos por  $M(t)$ .

### Distribución Bernoulli

$$\begin{aligned} X &\sim \text{Ber}(p) \text{ con } p \in (0, 1). \\ f(x) &= p^x(1-p)^{1-x} \text{ para } x = 0, 1. \\ E(X) &= p. \\ \text{Var}(X) &= p(1-p). \\ G(t) &= 1-p+pt. \\ M(t) &= (1-p)+pe^t. \end{aligned}$$

### Distribución beta

$$\begin{aligned} X &\sim \text{beta}(a, b) \text{ con } a > 0, b > 0. \\ f(x) &= x^{a-1}(1-x)^{b-1}/B(a, b) \text{ para } x \in (0, 1). \end{aligned}$$

$$E(X) = a/(a + b).$$

$$\text{Var}(X) = ab/[(a + b + 1)(a + b)^2].$$

## Distribución binomial

$$X \sim \text{bin}(n, p) \text{ con } n \in \{1, 2, \dots\} \text{ y } p \in (0, 1).$$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \text{ para } x = 0, 1, \dots, n.$$

$$E(X) = np.$$

$$\text{Var}(X) = np(1 - p).$$

$$G(t) = (1 - p + pt)^n.$$

$$M(t) = [(1 - p) + pe^t]^n.$$

## Distribución binomial negativa

$$X \sim \text{bin neg}(\alpha, p) \text{ con } p \in (0, 1) \text{ y } \alpha \in \{1, 2, \dots\}.$$

$$f(x) = \binom{\alpha + x - 1}{x} p^\alpha (1 - p)^x \text{ para } x = 0, 1, \dots$$

$$E(X) = \alpha(1 - p)/p.$$

$$\text{Var}(X) = \alpha(1 - p)/p^2.$$

$$G(t) = [p/(1 - t(1 - p))]^\alpha.$$

$$M(t) = [p/(1 - te^t)]^\alpha.$$

## Distribución Cauchy

$$X \sim \text{Cauchy}(a, b) \text{ con } a > 0 \text{ y } b > 0.$$

$$f(x) = \frac{1}{b\pi[1 + ((x - a)/b)^2]}.$$

La esperanza y varianza no existen.

Cuando  $a = 0$  y  $b = 1$  se obtiene la distribución Cauchy estándar. En este caso,

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

$$F(x) = 1/2 + (\arctan x)/\pi.$$

## Distribución exponencial

$$X \sim \exp(\lambda) \text{ con } \lambda > 0.$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ para } x > 0.$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ para } x > 0.$$

$$E(X) = 1/\lambda.$$

$$\text{Var}(X) = 1/\lambda^2.$$

$$M(t) = \lambda/(\lambda - t) \text{ para } t < \lambda.$$

## Distribución gama

$$X \sim \text{gama}(n, \lambda) \text{ con } n > 0 \text{ y } \lambda > 0.$$

$$f(x) = \frac{(\lambda x)^{n-1}}{\Gamma(n)} \lambda e^{-\lambda x} \text{ para } x > 0.$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda x)^j / j! \text{ para } x > 0 \text{ y } n \text{ entero.}$$

$$E(X) = n/\lambda.$$

$$\text{Var}(X) = n/\lambda^2.$$

$$M(t) = [\lambda/(\lambda - t)]^n \text{ para } t < \lambda.$$

## Distribución ji-cuadrada

$$X \sim \chi^2(n) \text{ con } n > 0.$$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} x^{n/2-1} e^{-x/2} \text{ para } x > 0.$$

$$E(X) = n.$$

$$\text{Var}(X) = 2n.$$

$$M(t) = (1 - 2t)^{-n/2} \text{ para } t < 1/2.$$

## Distribución log normal

$X \sim \text{log normal}(\mu, \sigma^2)$  con  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma^2 > 0$ .

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp[-(\ln x - \mu)^2/2\sigma^2] \quad \text{para } x > 0.$$

$$E(X) = \exp(\mu + \sigma^2/2).$$

$$E(X^n) = \exp(n\mu + n^2\sigma^2/2).$$

$$\text{Var}(X) = \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2).$$

## Distribución normal

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$  con  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma^2 > 0$ .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

$$E(X) = \mu.$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2.$$

$$M(t) = \exp(\mu t + \sigma^2 t^2/2).$$

$$\phi(t) = \exp(i\mu t - \sigma^2 t^2/2).$$

Cuando  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 1$  se obtiene la distribución normal estándar.

## Distribución Pareto

$X \sim \text{Pareto}(a, b)$  con  $a, b > 0$ .

$$f(x) = \frac{ab^a}{(b+x)^{a+1}} \quad \text{para } x > 0.$$

$$F(x) = 1 - [b/(b+x)]^a \quad \text{para } x > 0.$$

$$E(X) = b/(a-1) \quad \text{para } a > 1.$$

$$\text{Var}(X) = ab^2/[(a-1)^2(a-2)] \quad \text{para } a > 2.$$

## Distribución Poisson

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$  con  $\lambda > 0$ .

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \text{ para } x = 0, 1, \dots$$

$$E(X) = \lambda.$$

$$\text{Var}(X) = \lambda.$$

$$G(t) = e^{-\lambda(1-t)}.$$

$$M(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)].$$

## Distribución t

$X \sim t(n)$  con  $n > 0$ .

$$f(x) = \frac{\Gamma(n + 1/2)}{\sqrt{n\pi} \Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n-1/2}.$$

$$E(X) = 0.$$

$$\text{Var}(X) = n/(n - 2) \text{ para } n > 2.$$

$M(t)$  no existe para  $t \neq 0$ .

$$\phi(t) = \exp(-|t|).$$

## Distribución uniforme continua

$X \sim \text{unif}(a, b)$  con  $a < b$ .

$$f(x) = 1/(b - a) \text{ para } x \in (a, b).$$

$$F(x) = (x - a)/(b - a) \text{ para } x \in (a, b).$$

$$E(X) = (a + b)/2.$$

$$\text{Var}(X) = (b - a)^2/12.$$

$$M(t) = (e^{bt} - e^{at})/(bt - at).$$

## Distribución uniforme discreta

$X \sim \text{unif}\{x_1, \dots, x_n\}$  con  $n \in \mathbb{N}$ .

$f(x) = 1/n$  para  $x = x_1, \dots, x_n$ .

$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ .

$\text{Var}(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2$ .

$M(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{x_j t}$ .

## Distribución Weibull

$X \sim \text{Weibull}(r, \lambda)$  con  $r, \lambda > 0$ .

$f(x) = e^{-(\lambda x)^r} r \lambda^r x^{r-1}$  para  $x > 0$ .

$F(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^r}$  para  $x > 0$ .

$E(X) = \Gamma(1 + 1/r)/\lambda$ .

$\text{Var}(X) = [\Gamma(1 + 2/r) - \Gamma^2(1 + 1/r)]/\lambda^2$ .

## Apéndice B

# El alfabeto griego

A $\alpha$	alpha	I $\iota$	iota	P $\rho, \varrho$	rho
B $\beta$	beta	K $\kappa$	kappa	$\Sigma \sigma, \varsigma$	sigma
$\Gamma \gamma$	gamma	$\Lambda \lambda$	lambda	T $\tau$	tau
$\Delta \delta$	delta	M $\mu$	mu	$\Upsilon \upsilon$	upsilon
E $\epsilon, \varepsilon$	epsilon	N $\nu$	nu	$\Phi \phi, \varphi$	phi
Z $\zeta$	zeta	$\Xi \xi$	xi	X $\chi$	chi
H $\eta$	eta	O o	omikron	$\Psi \psi$	psi
$\Theta \theta, \vartheta$	theta	$\Pi \pi$	pi	$\Omega \omega$	omega

## Apéndice C

# Función indicadora

La *función indicadora* de un conjunto  $A \subseteq \Omega$  es la función  $1_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  dada por

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

De este modo la función  $1_A$  toma el valor uno dentro del conjunto  $A$  y cero fuera de él, y cumple las siguientes propiedades.

- a)  $1_{A \cup B} = \max\{1_A, 1_B\} = 1_A + 1_B - 1_A \cdot 1_B.$
- b)  $1_{A \cap B} = \min\{1_A, 1_B\} = 1_A \cdot 1_B.$
- c)  $1_{A^c} = 1 - 1_A.$
- d)  $1_{A-B} = 1_A - 1_A \cdot 1_B.$
- e)  $1_{A \Delta B} = |1_A - 1_B| = 1_A + 1_B - 2 \cdot 1_A \cdot 1_B = (1_A - 1_B)^2.$
- f)  $A \subseteq B \Rightarrow 1_A \leq 1_B.$

## Apéndice D

# Esperanza condicional

Sean  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad,  $X$  una variable aleatoria con esperanza finita y  $\mathcal{G}$  una sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$ . La *esperanza condicional* de  $X$  dado  $\mathcal{G}$  es una variable aleatoria denotada por  $E(X|\mathcal{G})$  que cumple las siguientes tres propiedades:

1. Es  $\mathcal{G}$ -medible.
2. Tiene esperanza finita.
3. Para cualquier evento  $G$  en  $\mathcal{G}$ ,

$$E[E(X|\mathcal{G}) \cdot 1_G] = E[X \cdot 1_G].$$

Puede demostrarse que esta variable aleatoria existe y es única casi seguramente, esto significa que si existe otra variable aleatoria con las tres propiedades anteriores entonces con probabilidad uno coincide con  $E(X|\mathcal{G})$ . Cuando  $\mathcal{G} = \sigma(Y)$  para alguna variable aleatoria  $Y$ , se escribe  $E(X|Y)$  en lugar de  $E(X|\sigma(Y))$ . Se enuncian a continuación algunas propiedades de esta esperanza.

- a.  $E(X|\{\emptyset, \Omega\}) = E(X)$ .
- b.  $E(1_A|\{\emptyset, \Omega\}) = P(A)$ .
- c.  $E(1_A|\{\emptyset, B, B^c, \Omega\}) = P(A|B)1_B + P(A|B^c)1_{B^c}$ .

- d.  $E(E(X | \mathcal{G})) = E(X)$ .
- e. Si  $X$  es  $\mathcal{G}$ -medible entonces  $E(X | \mathcal{G}) = X$ .  
En particular, si  $c$  es una constante entonces  $E(c | \mathcal{G}) = c$ .
- f.  $E(aX + Y | \mathcal{G}) = aE(X | \mathcal{G}) + E(Y | \mathcal{G})$ .
- g. Si  $X \geq 0$  entonces  $E(X | \mathcal{G}) \geq 0$ .
- h. [Teorema de convergencia monótona]  
Si  $0 \leq X_n \nearrow X$ , entonces  $E(X_n | \mathcal{G}) \nearrow E(X | \mathcal{G})$  c.s.
- i. [Teorema de convergencia dominada]  
Si  $|X_n| \leq Y$ ,  $E|Y| < \infty$  y  $X_n \rightarrow X$  c.s., entonces  $E(X_n | \mathcal{G}) \rightarrow E(X | \mathcal{G})$  c.s.
- j. [Desigualdad de Jensen]  
Si  $\varphi$  es convexa, entonces  $\varphi(E(X | \mathcal{G})) \leq E(\varphi(X) | \mathcal{G})$ .
- k. Si  $\mathcal{H}$  es una sub  $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{G}$ , entonces  $E(E(X | \mathcal{G}) | \mathcal{H}) = E(X | \mathcal{H})$ .
- l. Si  $Z$  es  $\mathcal{G}$ -medible y acotada, entonces  $E(Z \cdot X | \mathcal{G}) = Z \cdot E(X | \mathcal{G})$ .
- m. Si  $X$  es independiente  $\mathcal{G}$ , entonces  $E(X | \mathcal{G}) = X$ .

En particular el término  $P(X \in A | Y)$  significa  $E(1_{(X \in A)} | Y)$ . De modo que

$$E(P(X \in A | Y)) = E(1_{(X \in A)}) = P(X \in A).$$

## Varianza condicional

Sea  $X$  con segundo momento finito y sea  $\mathcal{G}$  una sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$ . La *varianza condicional* de  $X$  dado  $\mathcal{G}$  se define como la variable aleatoria dada por

$$\text{Var}(X | \mathcal{G}) = E[(X - E(X | \mathcal{G}))^2 | \mathcal{G}].$$

Nuevamente cuando la sub- $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G}$  es  $\sigma(Y)$  para alguna variable aleatoria  $Y$  entonces  $\text{Var}(X | \mathcal{G})$  se escribe  $\text{Var}(X | Y)$  y puede tomarse como definición la igualdad

$$\text{Var}(X | Y) = E[(X - E(X | Y))^2 | Y].$$

Se enuncian a continuación algunas propiedades de esta variable aleatoria.

- a.  $\text{Var}(X | \{\emptyset, \Omega\}) = \text{Var}(X)$ .
- b.  $\text{Var}(1_A | \{\emptyset, \Omega\}) = P(A)(1 - P(A))$ .
- c.  $\text{Var}(X | \mathcal{G}) = E(X^2 | \mathcal{G}) - E^2(X | \mathcal{G})$ .
- d.  $\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X | \mathcal{G})] + \text{Var}[E(X | \mathcal{G})]$ .

Un estudio más detallado de la esperanza condicional puede ser encontrado en libros dedicados a probabilidad como [5] o [10].

# Bibliografía

- [1] Beard R. E., Pentikäinen T., Pesonen E. (1984) *Risk theory*. Tercera edición. Chapman and Hall. London.
- [2] Bühlmann H. (1970) *Mathematical methods in risk theory*. Springer-Verlag. New York.
- [3] Daykin C. D., Pentikäinen T., Pesonen M. (1994) *Practical risk theory for actuaries*. Chapman and Hall. London.
- [4] Gerber H. U. (1979) *An introduction to mathematical risk theory*. Monograph No. 8. S. S. Huebner Foundation for Insurance Education. Wharton School. University of Pennsylvania.
- [5] Karr A. F. (1993) *Probability*. Springer-Verlag.
- [6] Kass R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. (2001) *Modern actuarial risk theory*. Kluwer Academic Publishers.
- [7] Melnikov A. (2003) *Risk analysis in finance and insurance*. Chapman & Hall/CRC.
- [8] Panjer H. H. (Editor) (1986) *Actuarial mathematics*. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. **35**, AMS.
- [9] Schmidli H. *Lecture notes on risk theory*.
- [10] Williams D. (1991) *Probability with martingales*. Cambridge University Press.

# Índice

- Agregado de reclamaciones
  - modelo colectivo, 8
  - modelo individual, 5
- Coefficiente de ajuste, 66
  - cotas, 69
- Condición de ganancia neta, 38, 65
- Credibilidad
  - Bayesiana, 51
  - completa, 48
  - parcial, 50
- Desigualdad de Lundberg, 68
- Distribución
  - Bernoulli, 73
  - beta, 73
  - binomial, 74
  - binomial negativa, 74
  - Cauchy, 74
  - exponencial, 75
  - gama, 75
  - ji-cuadrada, 75
  - log normal, 76
  - normal, 76
  - Pareto, 76
  - Poisson, 77
  - t de Student, 77
  - uniforme continua, 77
  - uniforme discreta, 78
  - Weibull, 78
- Espacio
  - filtrado, 55
- Esperanza
  - condicional, 81
- Exponente de Lundberg, 66
- Factor de credibilidad, 50
- Filtración, 55
  - natural, 55
- Función
  - indicadora, 80
- Modelo
  - binomial compuesto, 12
  - binomial negativo compuesto, 12
  - colectivo, 8
  - individual, 4
  - Poisson compuesto, 13
    - asociado, 14
    - como límite, 16
    - como suma, 18
    - con reclamaciones clasificadas, 18
    - mixto, 20
- Proceso
  - adaptado, 55
  - equivalencia, 55
  - estocástico, 54
  - indistinguibilidad, 55
  - modificación, 55
  - submartingala, 58
  - supermartingala, 58

trayectorias, 55  
versión, 55

Reaseguro

de pérdida máxima (stop loss),  
44  
por exceso de pérdida (excess of  
loss), 43  
proporcional, 43, 44

Riesgo, 5

Tiempo de paro, 55

Varianza

condicional, 82