

# Geometría Analítica I

## LECTURA 2

Ayudante: Guilmer González

Día 3 de septiembre, 2009

El día de hoy veremos:

1. Sobre la distancia de un punto a una recta

## 1 Sobre la distancia de un punto a una recta

El tema que veremos es muy sencillo, calcular la distancia de un punto a una recta.

Contamos con un punto  $P_0(x_0, y_0)$  en el plano y una recta. La recta la podemos considerar en su forma escalar por

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \mid ax + by + c = 0\}$$

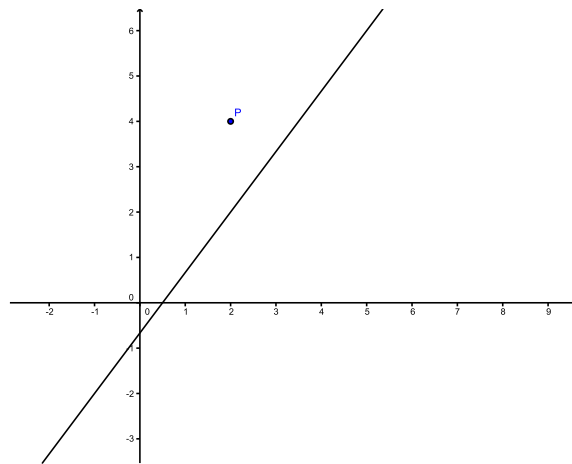


Figura 1: Un punto y una recta.

El día de ayer en clase discutimos un procedimiento para lograrlo, el procedimiento A, que se enuncia como:

- 1) Encuentre la recta  $\mathcal{L}^\perp$  perpendicular a  $\mathcal{L}$  que pase por  $P_0((x_0, y_0))$
- 2) Calcule la intersección  $Q$  entre las rectas  $\mathcal{L}^\perp$  y  $\mathcal{L}$ .
- 3) Calcule la distancia entre esos puntos  $d(P_0, Q)$

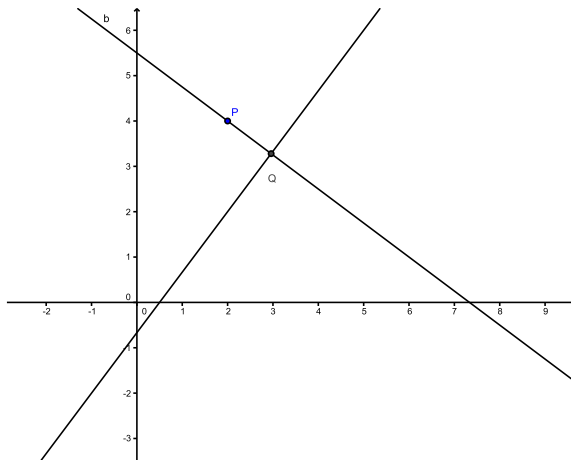


Figura 2: Un procedimiento para calcular  $d(P_0, \mathcal{L})$ .

Consideremos un problema numérico y luego hagamos los cálculos de manera general.

### 1.1 Caso numérico

Considere la recta  $4x - 3y - 2 = 0$  y el punto  $P(2, 4)$ , como se muestra en la figura 3.

La familia de rectas perpendiculares a  $\mathcal{L}$  se puede escribir de la forma:

$$3x + 4y + d = 0$$

con  $d$  un parámetro a determinar y que tiene que ver con el desplazamiento vertical de la recta. Para que la recta pase por  $P(2, 4)$ , ese parámetro queda determinado al sustituir el punto y resolver para  $d$

$$3(2) + 4(4) + d = 0$$

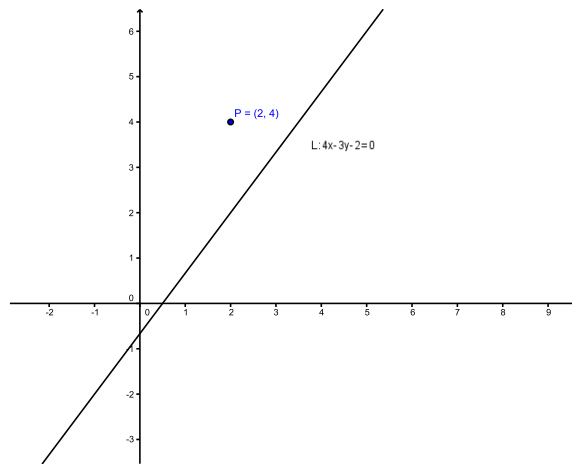


Figura 3: Ejemplo numérico.

el valor buscado es  $d = -22$ . Una vez encontrada la recta perpendicular que pasa por  $P$  (paso 1) de nuestro procedimiento, calculemos el punto de intersección entre ambas rectas

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 2 \\ 3x + 4y &= 22 \end{aligned}$$

Eliminemos la variable  $y$ . Multiplicando por 4 a todos los elementos de la primera ecuación, y por 3 a todos los elementos de la segunda, tenemos

$$\begin{aligned} (4)4x - (4)3y &= (4)2 \\ (3)3x + (3)4y &= (3)22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16x - 12y &= 8 \\ 9x + 12y &= 66 \end{aligned}$$

logrando  $25x = 74$ , es decir  $x = 74/25 = 2.96$ . Ahora (podemos sustituir y encontrar la otra variable pero resulta cómodo aplicar la misma forma que

usamos para eliminar la variable  $y$ ), eliminemos la variable  $x$ . Multipliquemos por  $-3$  a todos los elementos de la primera ecuación y por  $4$  a todos elementos de la segunda ecuación

$$\begin{aligned}(-3)4x - (-3)3y &= (-3)2 \\(4)3x + (4)4y &= (4)22\end{aligned}$$

obteniendo

$$\begin{aligned}-12x + 9y &= -6 \\12x + 16y &= 88\end{aligned}$$

logrando  $25y = 82$ , es decir  $y = 82/25 = 3.28$ . El punto de intersección es  $Q(2.96, 3.28)$ .

Ahora hagamos el último paso del procedimiento, calculemos la distancia entre  $P_0$  y  $Q$ , esa será la distancia entre  $P_0$  y la recta:

$$\begin{aligned}d(P_0, Q) &= \sqrt{(x_q - x_0)^2 + (y_q - x_0)^2} \\&= \sqrt{(2.96 - 2)^2 + (3.28 - 4)^2} \\&= \sqrt{0.9216 + 0.5184} = 1.2\end{aligned}$$

Hemos logrado calcular la distancia de un punto a una recta.

Ahora hagamos el cálculo en su forma general.

## 1.2 Caso general

Tenemos un punto  $P_0(x_0, y_0)$  fuera de la recta  $\mathcal{L} : ax + by + c = 0$ . De acuerdo a nuestros cálculos, la familia de rectas perpendiculares a  $\mathcal{L}$  es de la forma

$$-bx + ay + d = 0$$

de entre ellas, aquella que pasa por  $P_0$  debe satisfacer que

$$-bx_0 + ay_0 + d = 0$$

con lo que la recta tiene la forma

$$-bx + ay + bx_0 - ay_0 = 0$$

Ahora, encontremos el punto de intersección entre ambas rectas

$$\begin{aligned} ax + by &= -c \\ -bx + ay &= -bx_0 + ay_0 \end{aligned}$$

Eliminemos la variable  $y$ , multipliquemos la primera ecuación por  $-a$  y la segunda por  $b$

$$\begin{aligned} (-a)ax + (-a)by &= (-a)(-c) \\ (b)(-b)x + (b)ay &= (b)(-bx_0 + ay_0) \end{aligned}$$

con lo que tenemos

$$(-a^2 - b^2)x = ac - b^2x_0 + aby_0$$

es decir, el punto de intersección es

$$x_q = -\frac{ac - b^2x_0 + aby_0}{a^2 + b^2}$$

Ahora eliminemos la variable  $x$ , multipliquemos la primera ecuación por  $b$  y la segunda por  $a$

$$\begin{aligned} (b)ax + (b)by &= (b)(-c) \\ (a)(-b)x + (a)ay &= (a)(-bx_0 + ay_0) \end{aligned}$$

logrando

$$(a^2 + b^2)y = -bc - abx_0 + a^2y_0$$

es decir, la coordenada  $y$  del punto de intersección es

$$y_q = \frac{-bc - abx_0 + a^2y_0}{a^2 + b^2}$$

Ahora calculemos la distancia entre esos dos puntos

$$\begin{aligned} d(P_0, Q)^2 &= (x_q - x_0)^2 + (y_q - y_0)^2 \\ &= \left(-\frac{ac - b^2x_0 + aby_0}{a^2 + b^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{-bc - abx_0 + a^2y_0}{a^2 + b^2} - y_0\right)^2 \\ &= \left(\frac{ac - b^2x_0 + aby_0 + x_0(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{-bc - abx_0 + a^2y_0 - y_0(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} (ac + aby_0 + x_0a^2)^2 + (bc + abx_0 + b^2y_0)^2 \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} (a^2(c + by_0 + ax_0)^2 + b^2(c + ax_0 + by_0)^2) \\ &= \frac{(a^2 + b^2)(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)} \\ &= \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

con lo cual

$$d(P_0, Q) = d(P_0, \mathcal{L}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

que representa la fórmula usual para calcular la distancia de un punto  $P_0$  a una recta dada. La cual es consistente con aquella que obtuvimos en clase para calcular la distancia del origen  $O$  a la recta:

$$d(O, \mathcal{L}) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$