

# Geometría Analítica I

## LECTURA 3

Ayudante: Guilmer González

Día 14 de febrero, 2008

El día de hoy veremos:

0. Distancia entre figuras.
1. Calcular la distancia de un punto a una recta.
2. Calcular la distancia de un punto a un plano.

## 1 Distancia de un punto a una recta

La recta puede estar en el plano, en  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{R}^n$ , el problema que nos compete es calcular la distancia de un punto a una recta. Iniciemos con la recta en el plano, tratemos de identificar el problema para luego plantear y resolver el mismo problema en el espacio.

Si cuento con una recta en  $\mathbb{R}^2$ , se ha visto en clase que se puede determinar ésta de manera explícita, con un vector dirección  $\vec{d}$  y un punto de la recta  $P_1$  en la forma:

$$P(t) = t\vec{d} + P_1$$

si se tienen dos puntos,  $P_1$  y  $P_2$  sobre la recta, el vector dirección se puede escribir como  $\vec{d} = \vec{P_1P_2}$ , bien, si lo prefiere, escribir la recta como

$$P(t) = (1 - t)P_1 + tP_2$$

La interpretación geométrica es la que nos atañe: nos dirigimos de  $P_1$  a  $P_2$ .

En el  $\mathbb{R}^2$ , también podemos escribir la recta en la forma implícita:

$$\vec{\eta} \cdot (P - P_1) = 0$$

donde  $P_1$  es un punto sobre la recta. Sin embargo, recuerde que ésta representación no es válida para el espacio o más allá. Usemos la representación explícita

En el plano la interpretación geométrica es bastante clara, si se tiene la recta se tiene un vector dirección desde  $P_1$ , y desde  $P_1$  hacia  $P_3$  (el punto de interés) se forma otro vector. La idea es proyectar  $\vec{b} = P_1\vec{P}_3$  hacia  $P_1\vec{P}_2$ , y la norma del vector ortogonal, será la distancia del punto a la recta, pues es el vector de norma mínima entre  $P_3$  y cualquier punto de la recta (recuerde el trabajo 2, que debió de haber hecho). En la figura se observa la idea

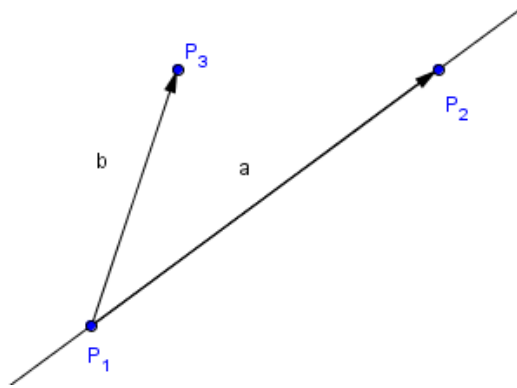


Figura 1: Proyectando el punto a la recta.

Con nuestro argumento, debemos calcular

$$\begin{aligned} d(P_3, \mathcal{L}) &= \|\vec{b} - \alpha^* \vec{a}\| \\ &= P_1\vec{P}_3 - \frac{P_1\vec{P}_3 \cdot P_1\vec{P}_2}{P_1\vec{P}_2 \cdot P_1\vec{P}_2} P_1\vec{P}_2 \end{aligned}$$

Hagamos un ejemplo numérico. Se tiene la recta

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \mid 2x - y - 2 = 0\}$$

y un punto que no está sobre de ella  $P_3(5, 3)$ . De manera inmediata tendremos dos puntos, cuando observamos a aquellos en que la recta corta a los

ejes coordenados, calculando tenemos  $P_1(0, -2)$  y  $P_2(1, 0)$ . De  $P_1$  hacia  $P_3$  formamos un vector  $\vec{b}$ :

$$\begin{aligned}\vec{b} &= P_1\vec{P}_3 = P_3 - P_1 \\ &= (5, 3) - (1, 0) = (4, 3)\end{aligned}$$

y el vector  $\vec{a}$  que va de  $P_1$  hacia  $P_2$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= P_1\vec{P}_2 = P_2 - P_1 \\ &= (1, 0) - (0, -2) = (1, 2)\end{aligned}$$

Calculamos el vector ortogonal al vector proyección de  $\vec{b}$  a  $\vec{a}$ :

$$\begin{aligned}(\text{Proy}_{\vec{a}}\vec{b})^\perp &= \vec{b} - \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}\vec{a} \\ &= (4, 3) - \frac{10}{5}(1, 2) = (2, -1)\end{aligned}$$

tomando la norma  $\|(\text{Proy}_{\vec{a}}\vec{b})^\perp\| = \sqrt{5}$

Lo interesante de la idea planteada, es que la distancia del punto a la recta, se relaciona con proyectar o “aventar” el punto a la recta (o al plano).

Para el  $\mathbb{R}^3$ , se sugiere haga usted el siguiente ejemplo: con los puntos  $P_1(1, 1, 2)$  y  $P_2(-1, 2, 2)$ , forme una recta  $\mathcal{L}$ , calcule la distancia de esa recta al punto  $P_3(-2, -1, 1)$ .

Veamos ahora el caso para el plano en  $\mathbb{R}^3$ .

## 2 Distancia de un punto a un plano

Se tiene un plano  $\Pi$  en  $\mathbb{R}^3$  y un punto  $P_0$  fuera de él. Cuál es la distancia del punto al plano?

Observe la siguiente figura,

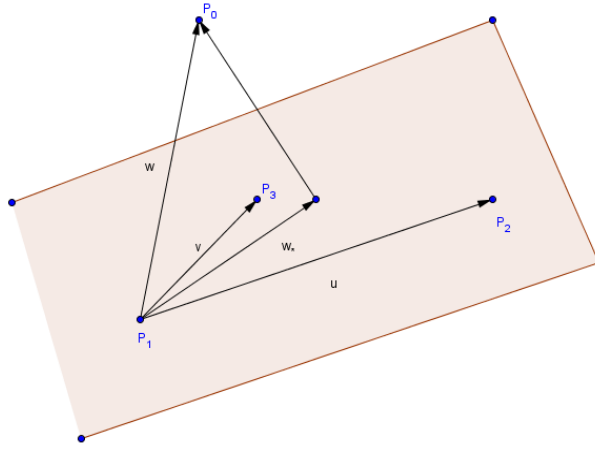


Figura 2: Proyectando el punto a un plano.

Si cuento con un punto sobre el plano, digamos  $P_1$ , puedo formar un vector  $\vec{w} = P_1\vec{P}_0$ , este vector debo proyectar sobre el plano y considerar lo que hemos llamado la perpendicular a la proyección (ésta es una corrección a  $\vec{w}$  desde el plano). Si sobre el plano encontramos dos puntos más  $P_2$  y  $P_3$  (no deben estar los tres alineados, cuidado!) podemos formar dos vectores más:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= P_1\vec{P}_2 \\ \vec{v} &= P_1\vec{P}_3\end{aligned}$$

con estos vectores puedo construir todo el plano, por lo que el vector proyección de  $\vec{w}$  sobre el plano se escribe como:

$\vec{w}^* = \alpha^*\vec{u} + \beta^*\vec{v}$  para que esto ocurra, lo que estamos llamado “la perpendicular a la proyección”:

$$(\vec{w}^*)^\perp = \vec{w} - \alpha^*\vec{u} - \beta^*\vec{v}$$

debe ser, desde luego, perpendicular al plano, es decir que

$$(\vec{w}^*)^\perp = \vec{w} - \alpha^*\vec{u} - \beta^*\vec{v}$$

sea ortogonal a  $\vec{v}$  y a  $\vec{u}$ :

$$(\vec{w}^*)^\perp \cdot \vec{u} = 0 \quad (\vec{w}^*)^\perp \cdot \vec{v} = 0$$

Lo que nos conduce a un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas (no es un sistema sencillo ya porque no hemos pedido ortogonalidad en  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , y si lo imponemos... ahorramos mucho trabajo).

Hagamos un ejemplo práctico para entender todas éstas ideas.

**Ejemplo numérico:** Considere el plano  $\Pi = \{(x, y, z) \mid 2x - y + z - 1 = 0\}$ , y el punto  $P_0(-1, 2, -1)$ , claramente  $P_0$  no está en el plano. Calcule la distancia de  $P_0$  al plano.

Encontremos tres puntos en el plano (no alineados)  $P_1(0, 0, 1)$  está sobre el plano, otro es  $P_2(1, 1, -1)$  y otro  $P_3(2, 1, -1)$ , tracemos los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  desde  $P_1$  hacia  $P_2$  y hacia  $P_3$ :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= P_1\vec{P}_2 = P_2 - P_1 = (1, 1, -1) - (0, 0, 1) = (1, 1, -2) \\ \vec{v} &= P_1\vec{P}_3 = P_3 - P_1 = (2, 1, -1) - (0, 0, 1) = (2, 1, -2) \end{aligned}$$

claramente los tres puntos no están alineados (diga por qué?). Ahora, el vector a proyectar es

$$\vec{w} = P_1\vec{P}_0 = P_0 - P_1 = (-1, 2, -1) - (0, 0, 1) = (-1, 2, -2)$$

el vector proyección  $\vec{w}^*$  debe vivir en el plano formado por esos puntos

$$\vec{w}^* = \alpha^* \vec{u} + \beta^* \vec{v}$$

y lo que hemos llamado el perpendicular a este, tiene la forma:

$$(\vec{w}^*)^\perp = \vec{w} - \alpha^* \vec{u} - \beta^* \vec{v}$$

y debe ser ortogonal al plano, y por consiguiente, ortogonal tanto a  $\vec{u}$  como a  $\vec{v}$ :

$$(\vec{w}^*)^\perp \cdot \vec{u} = 0, \quad (\vec{w}^*)^\perp \cdot \vec{v} = 0$$

esto nos lleva a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Hagamos las cuentas.

$$\begin{aligned}
(\vec{w}^*)^\perp \cdot \vec{u} &= (\vec{w} - \alpha^* \vec{u} - \beta^* \vec{v}) \cdot \vec{u} \\
&= \vec{w} \cdot \vec{u} - \alpha^* \vec{u} \cdot \vec{u} - \beta^* \vec{v} \cdot \vec{u} \\
&= -3 - 6\alpha^* - 3\beta^* = 0
\end{aligned}$$

y la otra ecuación

$$\begin{aligned}
(\vec{w}^*)^\perp \cdot \vec{v} &= (\vec{w} - \alpha^* \vec{u} - \beta^* \vec{v}) \cdot \vec{v} \\
&= \vec{w} \cdot \vec{v} - \alpha^* \vec{u} \cdot \vec{v} - \beta^* \vec{v} \cdot \vec{v} \\
&= 3\alpha^* - 5\beta^* = 0
\end{aligned}$$

Se deja al lector los detalles y cálculo final de la distancia.

**Otra forma:** Si tiene la representación implícita del plano (una representación implícita), podemos entonces contar con un vector  $\vec{\eta}$  ortogonal al plano. Si tomamos ese vector como aquel que parte del punto  $P_0$ , tendremos una recta, que será ortogonal al plano, esa recta estará en forma explícita y dependerá de un parámetro digamos  $t$ , si intersectamos la recta con el plano, tendremos un punto  $P^*$ . La distancia del punto  $P_0$  al plano es  $\|P_0 - P^*\|$ . Justifique esto.